E.T.S.I. MINAS
U.P.M.

EXAMEN DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS: ELASTICIDAD

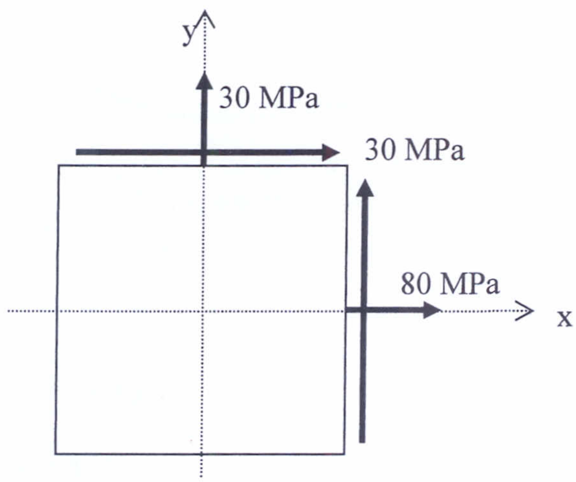
16-01-2012

EVALUACIÓN CONTINUA
(Duración: 1 hora)

EJERCICIO (10 PUNTOS)

En el estado tensional plano de la figura, sabiendo que $E=210\cdot10^3$ MPa; $\upsilon=0.3$, se pide:

1. Mediante el círculo de Möhr, determinar las tensiones y direcciones principales. (2 puntos)
2. Mediante el círculo de Möhr, calcular el valor de la tensión tangencial máxima indicando en qué planos se produce. (1 punto)
   Dibujar en un croquis este estado tensional. (2 puntos)
3. Mediante el círculo de Möhr, determinar las componentes intrínsecas del vector tensión correspondientes a un plano cuya normal forma 30º en sentido antihorario con el eje x. (2 puntos)
   Dibujar en un croquis el estado tensional plano resultante. (2 puntos)
4. Componer la matriz de deformación referida a los ejes principales. (1 punto)



E.T.S.I. MINAS
U.P.M.

EXAMEN DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS: ELASTICIDAD

16-01-2012

EVALUACIÓN FINAL
(Duración: 1 hora)

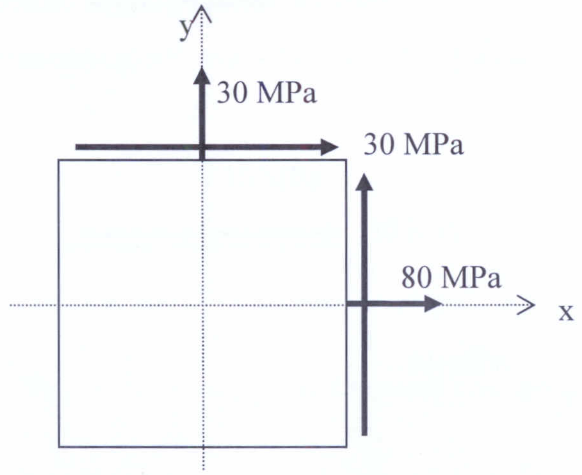
EJERCICIO (8 PUNTOS)

En el estado tensional plano de la figura, sabiendo que $E=210\cdot10^3$ MPa; $\upsilon=0.3$, se pide:

1. Mediante el círculo de Möhr, determinar las tensiones y direcciones principales. (2 puntos)
2. Mediante el círculo de Möhr, calcular el valor de la tensión tangencial máxima indicando en qué planos se produce. (1 punto)

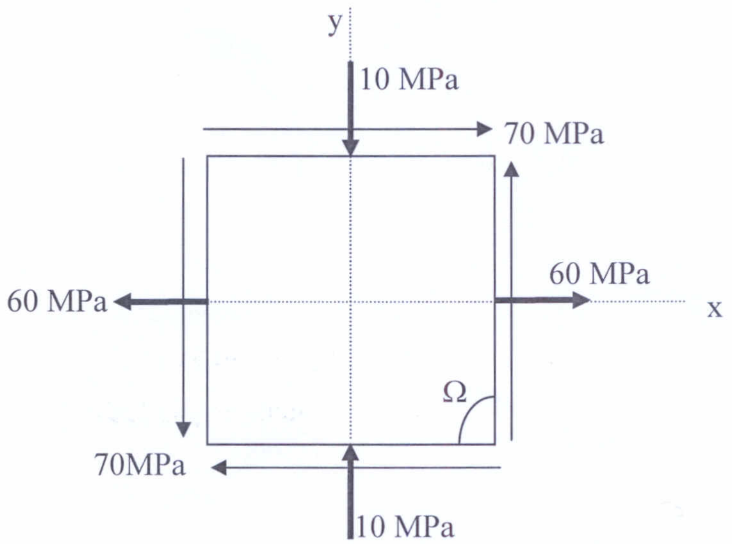
   Dibujar en un croquis este estado tensional. (1 punto)
3. Mediante el círculo de Möhr, determinar las componentes intrínsecas del vector tensión correspondientes a un plano cuya normal forma 30º en sentido antihorario con el eje x. (2 puntos)

   Dibujar en un croquis el estado tensional plano resultante. (1 punto)
4. Componer la matriz de deformación referida a los ejes principales. (1 punto)



EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

En el E.T.P. de la figura se pide calcular cuánto vale el ángulo Ω (inicialmente recto) después de la deformación, indicando si aumenta o disminuye. Datos: $E=210\cdot10^3$ MPa; $\upsilon=0.3$

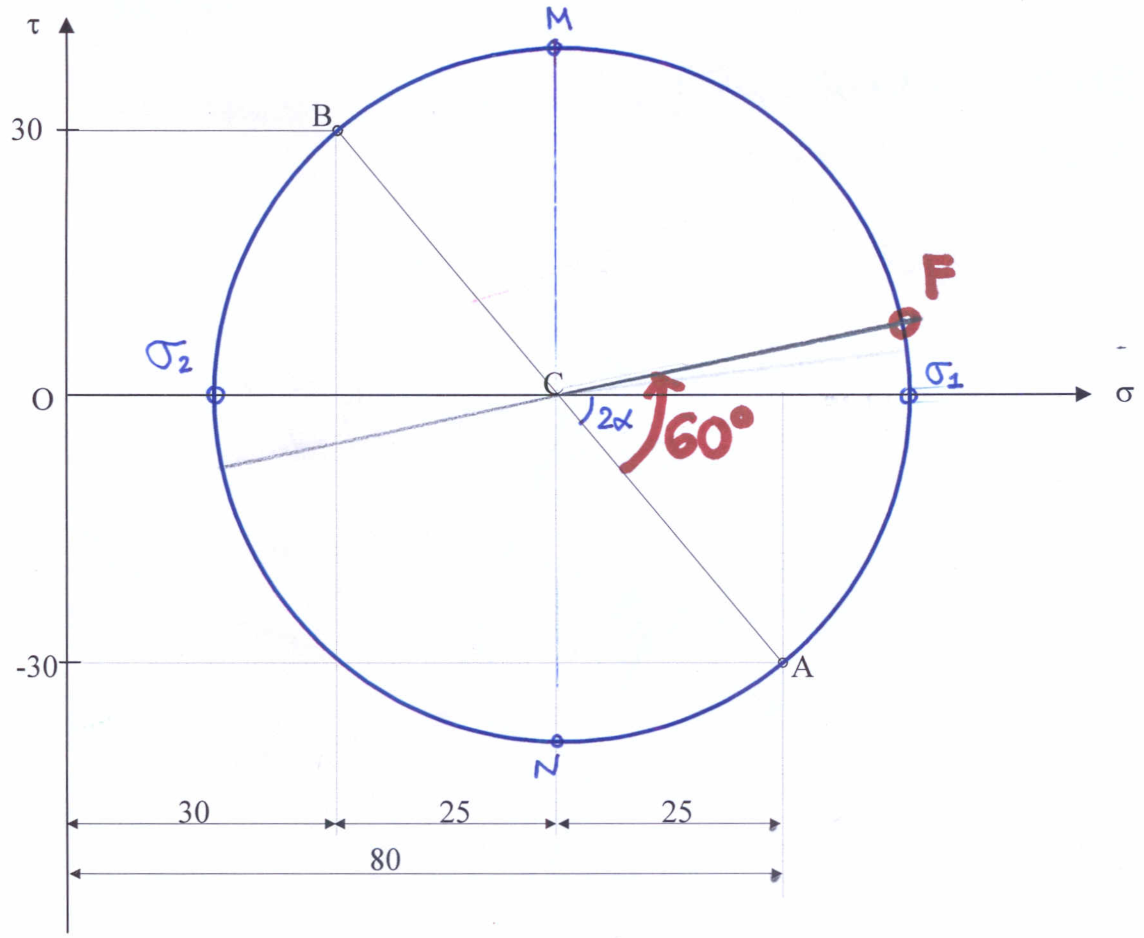


EXAMEN DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS: ELASTICIDAD

16-01-2012

SOLUCIÓN_EVALUACIÓN CONTINUA

EJERCICIO 1



CENTRO: $OC = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{80+30}{2} = 55$

RADIO $R = \sqrt{25^2 + 30^2} = 39.05$

$\boxed{1}$ **Tensiones principales:**

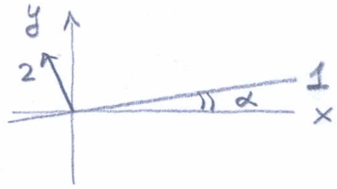
$\sigma_1 = OC + R = 55 + 39.05 = 94'05$ MPa

$\sigma_2 = OC - R = 55 - 39'05 = 15'95$ MPa

Direccions principals

$tg\ 2\alpha = \dfrac{30}{25}$

$\hat{\alpha} = 25'09°$



$\vec{n}_1 = \cos 25'09\ \vec{i} + \operatorname{sen} 25'09\ \vec{j} = 0'91\ \vec{i} + 0'42\ \vec{j}$

$\vec{n}_2 = -0'42\ \vec{i} + 0'91\ \vec{j}$

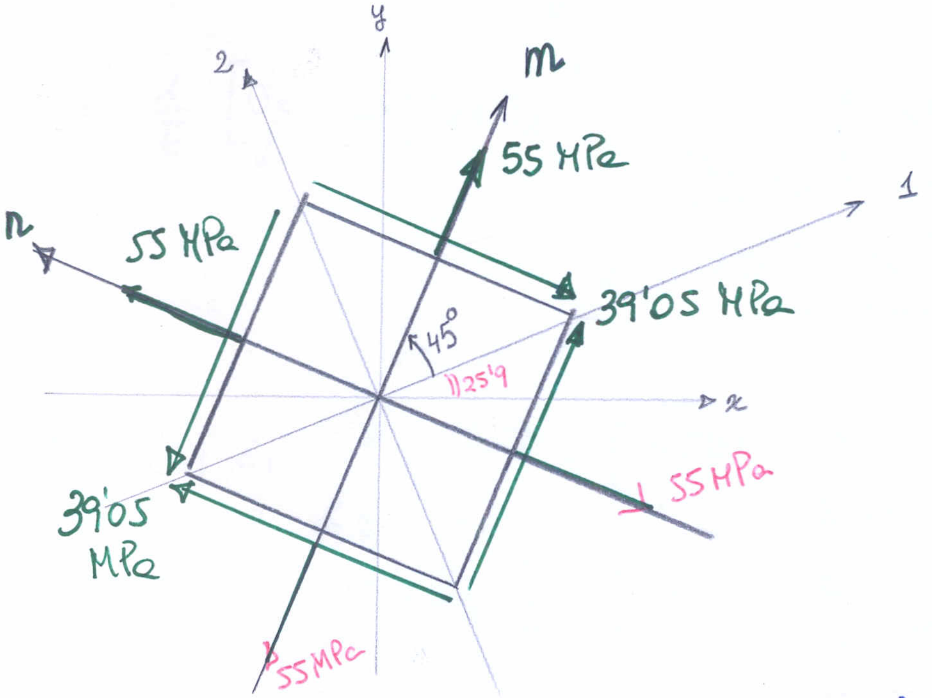
$\boxed{2}$ Tensión tangencial máxima

$\tau_{máx} = R = 39'05$ MPa

Se produce en planos M y N que forman 45° con los principales

Del círculo se extrae M $\begin{cases} \sigma_M = 30+25 = 55 \text{ MPa} \\ \tau_{MN} = R = 39'05 \text{ MPa.} \end{cases}$

de igual modo N $(\sigma, \tau) = (55, 39'05)$

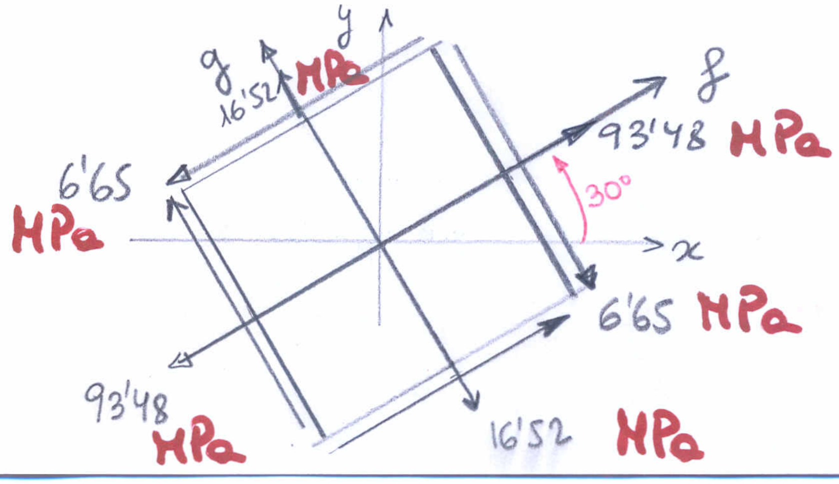


$\boxed{3}$ 30° con el eje x (ver círculo de Möhr 60° desde A)

$\sigma_F = OC + R \cdot \cos(60-2\alpha) = 55 + 39'05 \cos 9'81 = 93'48$ MPa.

$\tau_{FG} = R \cdot \text{sen}(60-2\alpha) = 6'65$ MPa.

Por invariantes $\sigma_G + \sigma_F = \sigma_x + \sigma_y \Rightarrow \sigma_G = 80 + 30 - 93'48 = \underline{16'52}$ MPa



4 $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \cancel{\sigma_3})\right] = \frac{1}{210\cdot 10^3}\left[94'05 - 0'3 \cdot 15'95\right] =$

$= 4'2 \cdot 10^{-4} \approx \boxed{42'51 \cdot 10^{-5}}$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \cancel{\sigma_3})\right] = \frac{1}{210\cdot 10^3}\left[15'95 - 0'3 \cdot 94'05\right] =$

$= \boxed{-5'84 \cdot 10^{-5}}$

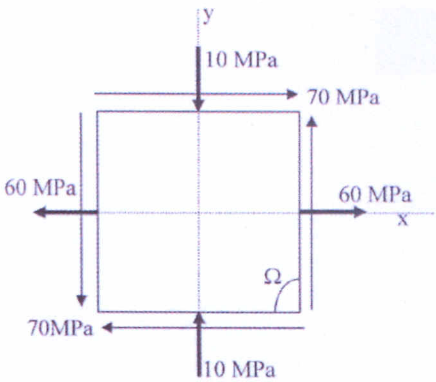
$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\cancel{\sigma_3} - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] = \frac{1}{210\cdot 10^3}\left[-0'3 \cdot 110\right] =$

$= \boxed{-15'71 \cdot 10^{-5}}$

$$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42'51 & 0 & 0 \\ 0 & -5'84 & 0 \\ 0 & 0 & -15'71 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO ADICIONAL DE EVALUACIÓN FINAL

EJERCICIO 2



$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = 80{,}77 \cdot 10^3 \ MPa$$

$$Como \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{70}{80{,}77 \cdot 10^3} = 0.001 \ rad$$

$0.01 \, rad = 0.05°$

de modo que Ω *aumenta*; $\boxed{\Omega = 90° + 0.05° = 90.05°}$

MECÁNICA (GIE) – FINAL DICIEMBRE-2011

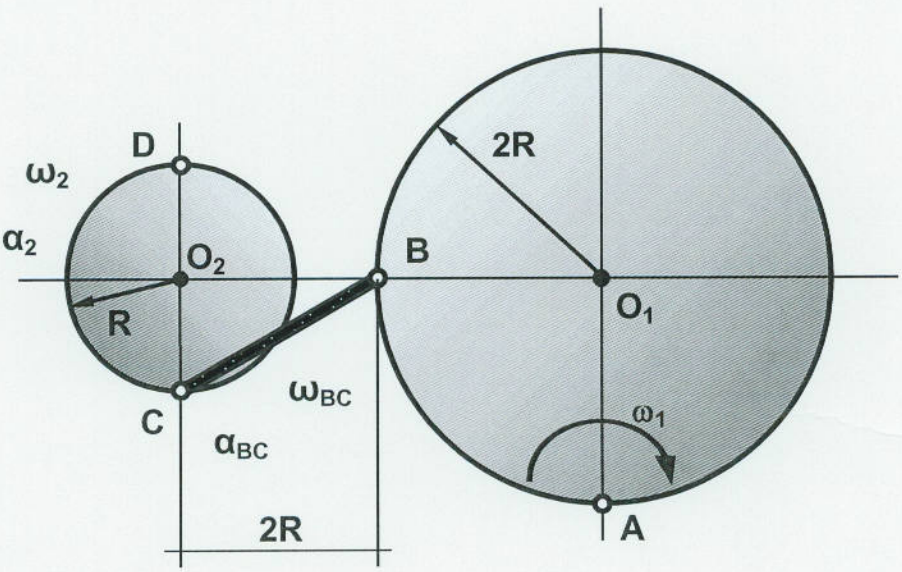
Tiempo: 8:00 a 10:00

Una pregunta de teoría y dos problemas

1. **Se tiene dos discos de centros O_1 y O_2 y radios 2R y R respectivamente, además existe una barra BC que une los dos discos en B y en C mediante sendas articulaciones como muestra la figura, están colocados en un plano horizontal. El disco de centro O_1, está fijo por el punto A mediante una articulación que permite su giro, gira con una velocidad angular ω_1 constante de sentido el indicado en la figura y el disco de centro O_2, está fijo en el punto D. Calcúlese de forma gráfica en el instante representado:**

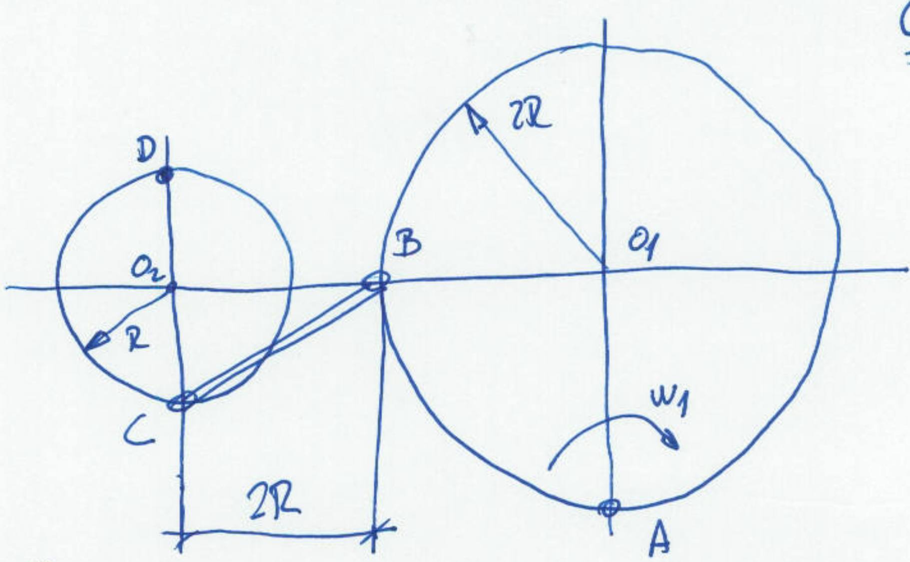
   a. **La aceleración angular de la barra BC y del disco de centro O_2, sabiendo que $\omega_{BC} = \omega_1$ en sentido antihorario y $\omega_2 = 3/2\ \omega_1$ en sentido antihorario. (4 puntos)**

   b. **La velocidad y aceleración relativas del disco de centro O_2 respecto el disco de centro O_1. (6 puntos)**



Nota: El dibujo no está a escala

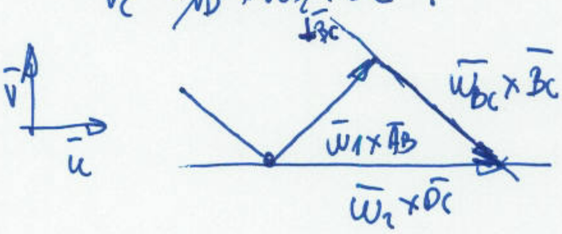
GIE ①



a)

$$\bar V_B = \cancel{\bar V_A}^{\,0} + \bar w_1 \times \bar{AB}$$
$$\bar V_C = \bar V_B + w_{BC} \times \bar{BC}$$
$$V_C = \cancel{\bar V_D}^{\,0} + \bar w_2 \times DC$$

$$\bar w_2 \times \bar{DC} = \bar w_1 \times \bar{AB} + \bar w_{BC} \times \bar{BC}$$



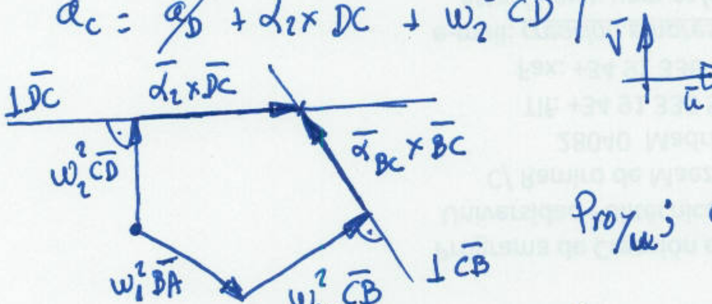
$Proy_u$ $\quad + w_2 2R = w_1 2R + w_{BC} R$

$Proy_v$ $\quad 0 = w_1 2R - w_{BC} 2R \Rightarrow \boxed{w_{BC} = w_1}$

$$w_2 2 = w_1 2 + w_1 \Rightarrow \boxed{w_2 = \frac{3 w_1}{2}}$$

$$\bar a_B = \cancel{\bar a_A}^{\,0} + \cancel{\bar \alpha_1}^{\,0} \times \bar{AB} + w_1^2 \bar{BA}$$
$$\bar a_C = \bar a_B + \bar\alpha_{BC} \times \bar{BC} + w_{BC}^2 \bar{CB}$$
$$\bar a_C = \cancel{\bar a_D}^{\,0} + \bar\alpha_2 \times \bar{DC} + w_2^2 \bar{CD}$$

$$\underset{¿?}{\bar\alpha_2} \times \bar{DC} + w_2^2 \bar{CD} = w_1^2 \bar{BA} + \underset{¿?}{\alpha_{BC}} \times BC + w_{BC}^2 \bar{CB}$$



$Proy_u$; $\quad 0 + \alpha_2 2R = w_1^2 2R + w_1^2 2R - \alpha_{BC} R$

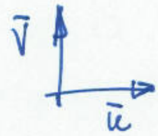
$Proy_v$; $\quad \frac{9}{\cancel{4}\,2} w_1^2 \cancel{2}R + 0 = -w_1^2 2R + w_1^2 R + \alpha_{BC} 2R$

$$2\alpha_{BC} = \left(\frac{9}{2} + 1\right) w_1^2 = \frac{11}{2} w_1^2 \; ; \; \boxed{\alpha_{BC} = \frac{11}{4} w_1^2}$$

$$2\alpha_2 = \left(4 - \frac{11}{4}\right) w_1^2 = \frac{5}{4} w_1^2 \; ; \; \boxed{\alpha_2 = \frac{5}{8} w_1^2}$$

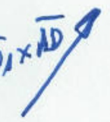
GIE

b) Tomamos los puntos A y D por ser fijos.



$\bar{V}_{REL_D} = \bar{V}_D - \bar{V}_{ARR_{AD}}$; $\bar{V}_D = \bar{0}$ por ser fijo.

$\bar{V}_{ARR_{AD}} = \cancel{\bar{V}_A}^{0} + \bar{\omega}_1 \times \bar{AD}$;



$Proy_u \, \bar{V}_{ARR\,AD} = \omega_1 3R$

$Proy_v \, \bar{V}_{ARR\,AD} = \omega_1 4R$

$\bar{V}_{REL_D} = -\bar{V}_{ARR_{AD}}$

$$\boxed{\begin{aligned} Proy_u \, \bar{V}_{REL} &= -\omega_1 3R \\ Proy_v \, \bar{V}_{REL} &= -\omega_1 4R \end{aligned}}$$

$\bar{a}_{REL_D} = \bar{a}_D - \bar{a}_{ARR_{AD}} - \bar{a}_{COR_{AD}}$

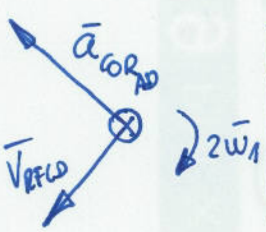
$\bar{a}_D = \bar{0}$

$\bar{a}_{ARR_{AD}} = \cancel{\bar{a}_A}^{0} + \cancel{\bar{\alpha}_1}^{0} \times \bar{AD} + \omega_1^2 \bar{DA}$;

$Proy_u \, \bar{a}_{ARR_{AD}} = \omega_1^2 4R$

$Proy_v \, \bar{a}_{ARR\,AD} = -\omega_1^2 3R$

$\bar{a}_{COR_{AD}} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{V}_{REL_D}$

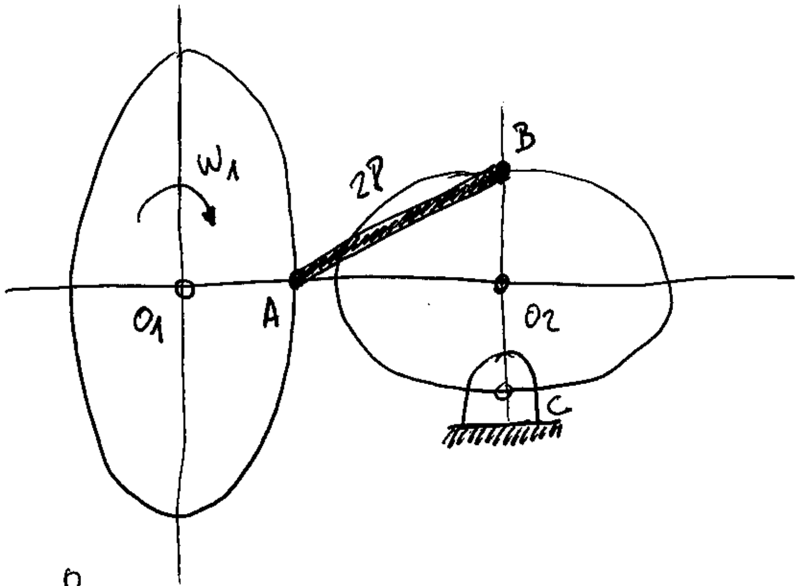


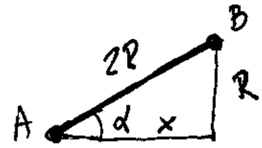
$Proy_u \, \bar{a}_{COR_{AD}} = 2\omega_1 4R\omega_1 = -8\omega_1^2 R$

$Proy_v \, \bar{a}_{COR_{AD}} = 2\omega_1 3R\omega_1 = 6\omega_1^2 R$

$\bar{a}_{REL_D} = -\bar{a}_{ARR_{AD}} - \bar{a}_{COR_{AD}}$;

$$\boxed{\begin{aligned} Proy_u \, \bar{a}_{REL_D} &= -(\omega_1^2 4R) - (-8\omega_1^2 R) = 4\omega_1^2 R \\ Proy_v \, \bar{a}_{REL_D} &= -(-\omega_1^2 3R) - (6\omega_1^2 R) = -3\omega_1^2 R \end{aligned}}$$

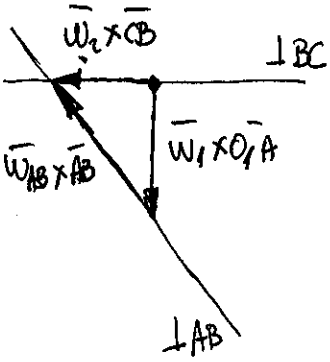


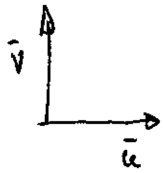


$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$x = 2R\cos 30^\circ = 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R$

a) $\left.\begin{array}{l} \bar{V}_A = \cancel{\bar{V}_{O_1}}^{\,0} + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1A} \\ \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega}_{AB} \times \overline{AB} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \bar{V}_B = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1A} + \bar{\omega}_{AB} \times \overline{AB} \\ \bar{V}_B = \cancel{\bar{V}_C}^{\,0} + \bar{\omega}_2 \times \overline{CB} \end{array}\right\}$ $\underset{¿?}{\bar{\omega}_2} \times \overline{CB} = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1A} + \underset{¿?}{\bar{\omega}_{AB}} \times \overline{AB}$





$\text{Proy}_u:\ -\omega_2\, 2R = 0 - \omega_{AB} R$

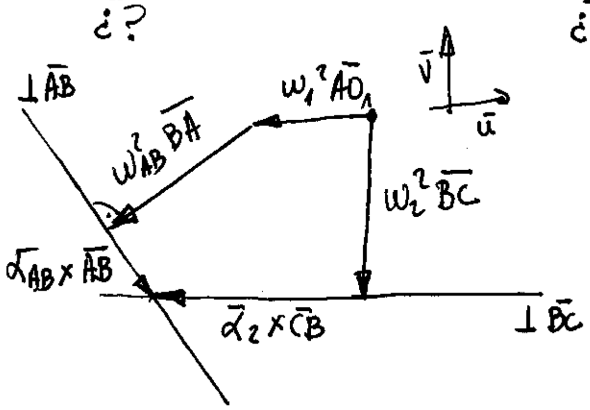
$\text{Proy}_v:\ 0 = -\omega_1 R + \omega_{AB}\sqrt{3}R \Rightarrow \boxed{\omega_{AB} = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}}} = \boxed{\omega_1\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$2\omega_2 = \omega_1\frac{\sqrt{3}}{3};\ \boxed{\omega_2 = \omega_1\frac{\sqrt{3}}{6}}$ 2,5

$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2\sqrt{3}}$

$\left.\begin{array}{l} \bar{a}_A = \cancel{\bar{a}_{O_1}}^{\,0} + \cancel{\bar{\alpha}_1 \times \overline{O_1A}}^{\,0\ \omega_1 = cte} + \omega_1^2\,\overline{AO_1} \\ \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\alpha}_{AB} \times \overline{AB} + \omega_{AB}^2\,\overline{BA} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \bar{a}_B = \omega_1^2\,\overline{AO_1} + \bar{\alpha}_{AB} \times \overline{AB} + \omega_{AB}^2\,\overline{BA} \\ \bar{a}_B = \cancel{\bar{a}_C}^{\,0} + \bar{\alpha}_2 \times \overline{CB} + \omega_2^2\,\overline{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\underset{¿?}{\bar{\alpha}_2} \times \overline{CB} + \omega_2^2\,\overline{BC} = \omega_1^2\,\overline{AO_1} + \underset{¿?}{\bar{\alpha}_{AB}} \times \overline{AB} + \omega_{AB}^2\,\overline{BA}$



$\text{Proy}_u:\ 0 - \alpha_2\, 2R = -\omega_1^2 R - \overbrace{\omega_1^2\frac{3}{9}}^{\omega_{AB}^2}\sqrt{3}R + \alpha_{AB} R$

$\text{Proy}_v:\ -\overbrace{\omega_1^2\frac{3}{36}}^{\omega_2^2}\,2R + 0 = 0 - \overbrace{\omega_1^2\frac{3}{9}}^{\omega_{AB}^2}R - \alpha_{AB}\sqrt{3}R$

$\sqrt{3}\alpha_{AB} = -\frac{1}{6}\omega_1^2;\ \boxed{\alpha_{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{18}\omega_1^2}$ 3,5

$2\alpha_2 = \omega_1^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right);\ \boxed{\alpha_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{36}\right)\omega_1^2}$

b) $\bar{V}_{ABS} = \bar{V}_{APP} + \bar{V}_{REL}$; $\quad \bar{V}_{C} = \bar{V}_{APP\,O_1/O_1} + \underbrace{\bar{V}_{REL_C}}_{¿?}$

$\bar{V}_C = \bar{0}$

$\bar{V}_{APP\,O_1/O_1} = \cancel{\bar{V}_{O_1}}^{\,0} + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1C}$; $\quad \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1C}$

$\bar{v}$, $\bar{u}$

$Proy_u\, \bar{V}_{APP\,O_1/O_1} = -\omega_1 R$

$Proy_v\, \bar{V}_{APP\,O_1/O_1} = -\omega_1 (R + \sqrt{3}R) = -\omega_1 R(1+\sqrt{3})$

$\bar{V}_{REL_C} = -\bar{V}_{APP\,O_1/O_1}$; $\quad \bar{V}_{REL_C}$, $-\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1C}$

$$\boxed{\begin{aligned} Proy_u\, \bar{V}_{REL_C} &= \omega_1 R \\ Proy_v\, \bar{V}_{REL_C} &= \omega_1 (R+\sqrt{3}R) = \omega_1 R (1+\sqrt{3}) \end{aligned}}$$

1,5

$\bar{a}_{ABS} = \bar{a}_{APP} + \bar{a}_{COR} + \bar{a}_{REL}$; $\quad \bar{a}_C = \bar{a}_{APP\,O_1/O_1} + \bar{a}_{COR_{C/O_1}} + \underbrace{\bar{a}_{REL_C}}_{¿?}$ $\quad \bar{v}$, $\bar{u}$

$\bar{a}_C = \bar{0}$

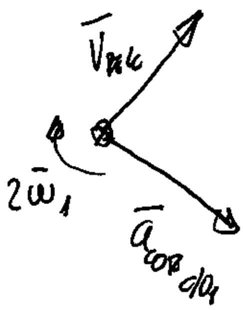
$\bar{a}_{APP\,O_1/O_1} = \cancel{\bar{a}_{O_1}}^{\,0} + \cancel{\bar{\alpha}_1}^{\,0} \times \overline{O_1C} + \omega_1^2\, \overline{CO_1}$; $\quad \omega_1^2\, \overline{CO_1}$

$Proy_u\, \bar{a}_{APP\,O_1/O_1} = -\omega_1^2 R(1+\sqrt{3})$

$Proy_v\, \bar{a}_{APP\,O_1/O_1} = \omega_1^2 R$

$\bar{a}_{COR} = 2[\bar{\omega}_{APP} \times \bar{V}_{REL}]$

$a_{COR_{C/O_1}} = 2[\bar{\omega}_1 \times V_{REL_C}]$

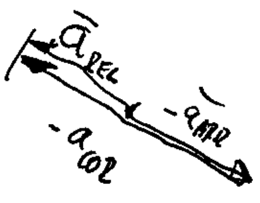


$Proy_u\, a_{COR_{C/O_1}} = 2\omega_1^2 R(1+\sqrt{3})$

$Proy_v\, a_{COR_{C/O_1}} = -2\omega_1^2 R$

$\bar{a}_{REL_C} = -\bar{a}_{APP\,O_1/O_1} - \bar{a}_{COR}$

$$\boxed{\begin{aligned} Proy_u\, a_{REL_C} &= -(-\omega_1^2 R(1+\sqrt{3})) - (2\omega_1^2 R(1+\sqrt{3})) = \\ &\underline{-\omega_1^2 R (1+\sqrt{3})} \\ Proy_v\, a_{REL_C} &= -(\omega_1^2 R) - (-2\omega_1^2 R) = \underline{\omega_1^2 R} \end{aligned}}$$



2,5

MECÁNICA (MG) – FINAL DICIEMBRE-2011

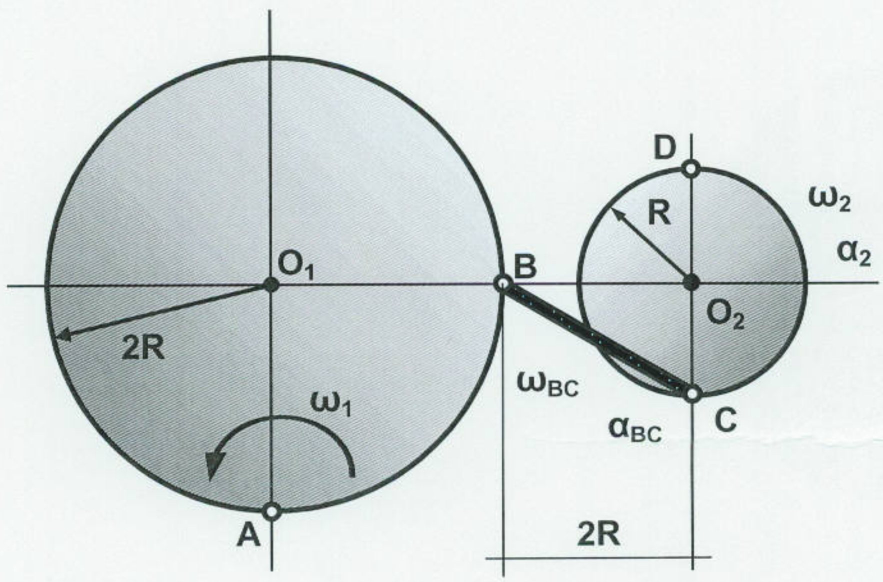
Tiempo: 14:00 a 16:00

Una pregunta de teoría y dos problemas

1. **Se tiene dos discos de centros O_1 y O_2 y radios 2R y R respectivamente, además existe una barra BC que une los dos discos en B y en C mediante sendas articulaciones como muestra la figura, están colocados en un plano horizontal. El disco de centro O_1, está fijo por el punto A mediante una articulación que permite su giro, gira con una velocidad angular ω_1 constante de sentido el indicado en la figura y el disco de centro O_2, está fijo en el punto D. Calcúlese de forma gráfica en el instante representado:**

    a. **La aceleración angular de la barra BC y del disco de centro O_2, sabiendo que $\omega_{BC} = \omega_1$ en sentido horario y $\omega_2 = 3/2\ \omega_1$ en sentido horario. (4 puntos)**

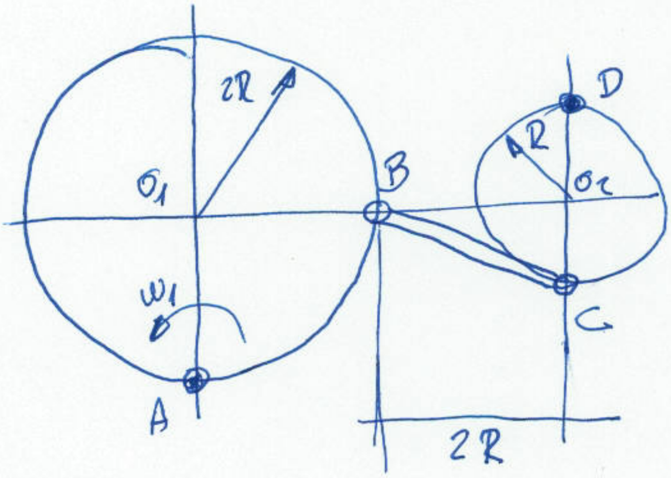
    b. **La velocidad y aceleración relativas del disco de centro O_2 respecto el disco de centro O_1. (6 puntos)**



Nota: El dibujo no está a escala

MG

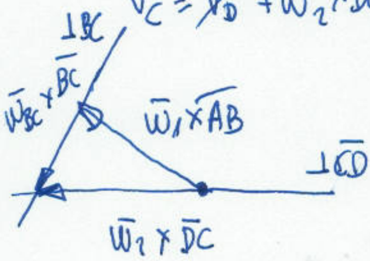
1



a)

$$\vec V_B = \cancel{\vec V_A}^{\,0} + \vec w_1 \times \vec{AB}$$
$$\vec V_C = \vec V_B + \vec w_{BC} \times \vec{BC}$$
$$\vec V_C = \cancel{\vec V_D}^{\,0} + \vec w_2 \times \vec{DC}$$

$$\underset{¿?}{\underline{\vec w_2}} \times \vec{DC} = \vec w_1 \times \vec{AB} + \underset{¿?}{\underline{\vec w_{BC}}} \times \vec{BC}$$



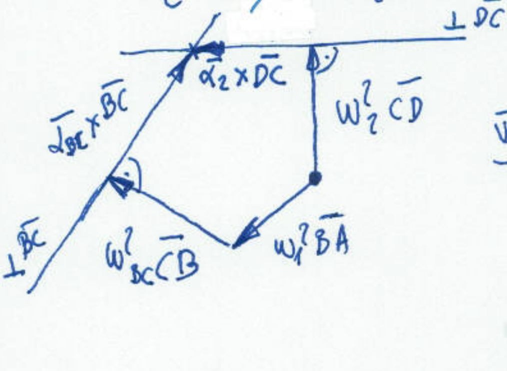
Proy u; $-w_2 2R = -w_1 2R - w_{BC} R$

Proy v; $0 = w_1 2R - w_{BC} 2R \Rightarrow \boxed{w_{BC} = \frac{w_1 2R}{2R} = w_1}$

$2w_2 = 2w_1 + w_1 = 3w_1$; $\boxed{w_2 = \frac{3}{2} w_1}$

$$\vec a_B = \cancel{\vec a_A}^{\,0} + \cancel{\vec\alpha_1}^{\,0} \times \vec{AB} + w_1^2 \vec{BA}$$
$$\vec a_C = \vec a_B + \vec\alpha_{BC} \times \vec{BC} + w_{BC}^2 \vec{CB}$$
$$\vec a_C = \cancel{\vec a_D}^{\,0} + \vec\alpha_2 \times \vec{DC} + w_2^2 \vec{CD}$$

$$\underset{¿?}{\underline{\vec\alpha_2}} \times \vec{DC} + w_2^2 \vec{CD} = w_1^2 \vec{BA} + \underset{¿?}{\underline{\vec\alpha_{BC}}} \times \vec{BC} + w_{BC}^2 \vec{CB}$$



Proy u; $0 - \alpha_2 2R = -w_1^2 2R - w_1^2 2R + \alpha_{BC} R$

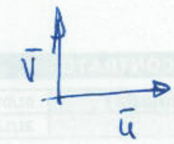
Proy v; $\frac{9}{4} w_1^2 2R + 0 = -w_1^2 2R + w_1^2 R + \alpha_{BC} 2R$

$2\alpha_{BC} = \left(\frac{9}{2} + 1\right) w_1^2 = \frac{11}{2} w_1^2$; $\boxed{\alpha_{BC} = \frac{11}{4} w_1^2}$

$2\alpha_2 = \left(4 - \frac{11}{4}\right) w_1^2$; $\boxed{\alpha_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} w_1^2 = \frac{5}{8} w_1^2}$

MG ②

b) Tomamos los puntos A y D por ser fijos.



$$\bar{V}_{RFC_D} = \bar{V}_D - \bar{V}_{ARR_{AD}} \;;\; \bar{V}_D = \bar{0} \text{ por ser fijo}$$

$$\bar{V}_{ARR_{AD}} = \bar{V}_A^{\,0} + \bar{\omega}_1 \times \bar{AD} \;;\qquad \bar{\omega}_1 \times \bar{AD}$$

$$Proy_u \bar{V}_{ARR_{AD}} = -\omega_1 3R$$

$$Proy_v \bar{V}_{ARR_{AD}} = +\omega_1 4R$$

$$\bar{V}_{RFC_D} = -\bar{V}_{ARR_{AD}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Proy_u \bar{V}_{RFC} = \omega_1 3R \\ Proy_v \bar{V}_{RFC} = -\omega_1 4R \end{array}}$$

$$\bar{a}_{RFC_D} = \bar{a}_D - \bar{a}_{ARR_{AD}} - \bar{a}_{COR_{AD}}$$

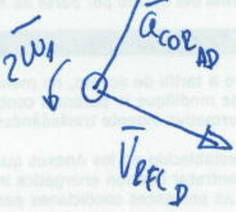
$$\bar{a}_D = \bar{0}$$

$$\bar{a}_{ARR_{AD}} = \bar{a}_A^{\,0} + \bar{\alpha}_1^{\,0} \times \bar{AD} + \omega_1^2 \bar{DA} \qquad \omega_1^2 \bar{DA}$$

$$Proy_u \bar{a}_{ARR_{AD}} = -\omega_1^2 4R$$

$$Proy_v \bar{a}_{ARR_{AD}} = \omega_1^2 3R$$

$$\bar{a}_{COR_{AD}} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{V}_{RFC_D}$$

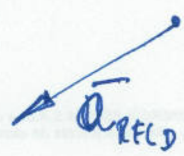


$$Proy_u \bar{a}_{COR_{AD}} = 2\omega_1^2 4R = +8\omega_1^2 R$$

$$Proy_v \bar{a}_{COR_{AD}} = 2\omega_1^2 3R = +6\omega_1^2 R$$

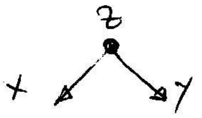
$$\bar{a}_{RFC_D} = -\bar{a}_{ARR_{AD}} - \bar{a}_{COR_{AD}} \;;\quad Proy_u \bar{a}_{RFC_D} = -(-\omega_1^2 4R) - (8\omega_1^2 R) = -4\omega_1^2 R$$

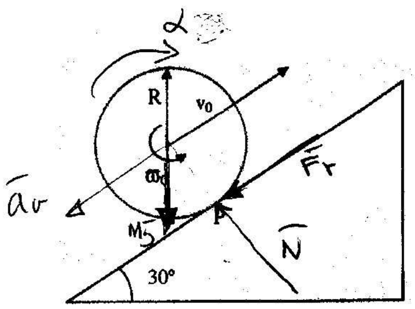
$$Proy_v \bar{a}_{RFC_D} = -(-\omega_1^2 3R) - (6\omega_1^2 R) = -3\omega_1^2 R$$



MECÁNICA
JULIO 2012

Un disco de radio R y masa M se lanza sobre un plano inclinado 30° con la horizontal, de forma que el centro lleva una velocidad $\overline{v_0}$ ascendente y un giro $\overline{\omega_0}$ antihorario. Sabiendo que $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}$ determinar en ese instante la aceleración angular del disco y la aceleración lineal de su centro.





- $\bar{F}_r$ contraria al movimiento (ahora desliza)
- $\bar{a}_G$ provocada por Fr y Mg sen 30
- α, Fr genera un par opuesto al giro.

T.C.M.

$$\sum \bar{F} = m\bar{a}_G \begin{cases} Mg \operatorname{sen} 30 + F_r = M a_G & (1) \\ Mg \cos 30 - N = 0 & (2) \end{cases}$$

T.M.C. en G

$$\bar{N} = \frac{d q_G}{dt} \; ; \quad q_G = \bar{\bar{I}}_G \bar{\omega} \; ; \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_z$$

$$\bar{q}_G = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{\omega_x} \\ \cancel{\omega_y} \\ \omega_z \end{pmatrix} = J_z \omega \bar{k}$$

$$\frac{dq_G}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} \bar{k} + J_z \omega \cancel{\frac{d\bar{k}}{dt}}^{\,0} \Rightarrow \bar{N} = J_z \alpha \bar{k}$$

$$R\bar{j} \times F_r \bar{i} = -\frac{1}{2} M R^2 \alpha \bar{k} \Rightarrow \boxed{R F_r = \frac{1}{2} M R^2 \alpha} \quad (3)$$

$$\boxed{F_r = \mu N} \quad (4)$$

* De las 4 ecuaciones anteriores:
$\alpha = 2g/R$ ↻ $\quad a_G = \frac{3}{2} g \; \cancel{\operatorname{sen} 30}$

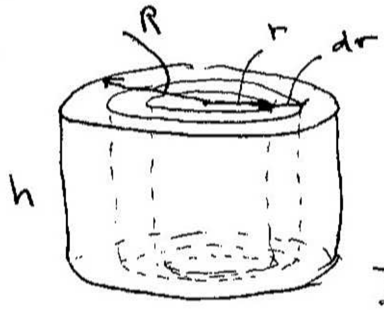
MECÁNICA

GIE Y MULTIGRADO

ENERO 2012

Sea un cilindro homogéneo de masa M, radio R y altura h, según figura. La única evolución posible del cilindro es un movimiento helicoidal ascendente en torno al eje de revolución OZ. Se definen los parámetros z y φ, que representan la altura del centro de masas del cilindro y el ángulo girado en torno a OZ. La condición que define el movimiento helicoidal es z=RKφ, donde **K** es una constante adimensional.

Obtener la Lagrangiana del sistema y hallar la ecuación diferencial que rige la evolución de φ.



$$dJ_z = r^2\,dm$$

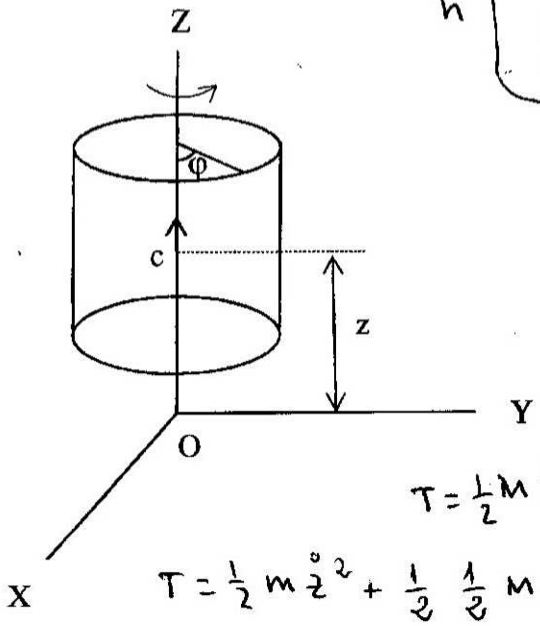
$$dm = \rho\, 2\pi r h \cdot dr$$

$$J_z = 2\pi\rho h \int_0^R r^3\,dr$$

$$J_z = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 h = \frac{1}{2} M R^2$$

$V_c = \dot{z}$

$\omega = \dot{\varphi}$



$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}\,\bar{\bar{I}}_c\,\bar{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2}(\cancel{w_x}\ \cancel{w_y}\ w_z)\begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cancel{w_x} \\ \cancel{w_y} \\ w_z \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{1}{2} M R^2 K^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2 \left(K^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$V = Mgz = MgRK\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2 \left(K^2 + \frac{1}{2}\right) - MgRK\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \; ; \quad \boxed{\cancel{M} R^{\cancel{2}}\left(K^2 + \frac{1}{2}\right)\ddot{\varphi} - \cancel{M} g \cancel{R} K = 0}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{gK}{R\left(K^2 + \frac{1}{2}\right)}}$$

E.T.S.I. MINAS
U.P.M.

EXAMEN DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS: ELASTICIDAD

4-07-2012

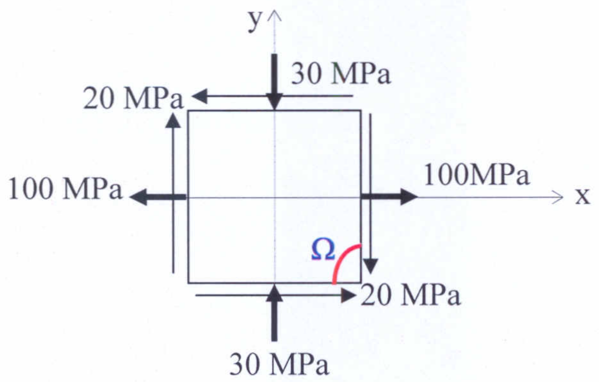
(Duración: 1 hora)

EJERCICIO (10 PUNTOS)

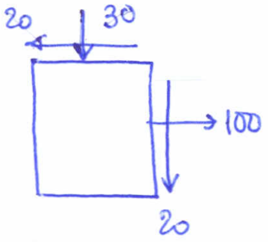
En el estado tensional plano de la figura se pide:

1. Determinar el valor de las tensiones principales y direcciones principales. (4 puntos)
2. Deformaciones longitudinales unitarias "ε_x" y "ε_y" (2 puntos)
3. Deformación angular máxima (2 puntos)
4. Valor del ángulo Ω (inicialmente recto) después de la deformación, indicando si aumenta o disminuye. (2 puntos)

Datos: E=210 GPa; υ=0.3



Solución examen de Elasticidad (4-07-2012)



$$[T] = \begin{bmatrix} 100 & -20 \\ -20 & -30 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} 100-\sigma & -20 \\ -20 & -30-\sigma \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \sigma_1 = 103 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

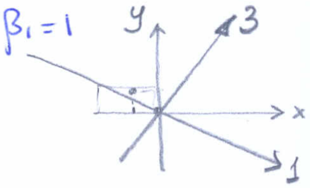
$$\sigma_3 = -33 \text{ MPa.}$$

Dirección principal 1

$$\begin{bmatrix} 100-103 & -20 \\ -20 & -30-103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -3\cos\alpha_1 - 20\cos\beta_1 = 0$$

$$\cos\alpha_1 = -6'67 \cos\beta_1$$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 = 1$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{n}_1 = \mp 0'99 \vec{i} \pm 0'15 \vec{j} \\ \bar{n}_3 = \mp 0'15 \vec{i} \mp 0'99 \vec{j} \end{array}}$$

2

$$\boxed{\varepsilon_x} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \cancel{\sigma_z})\right] = \frac{1}{200\cdot 10^3}\left[100 - 0'3\cdot(-30)\right] = \boxed{5'19\cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{\varepsilon_y} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_z})\right] = \frac{1}{200\cdot 10^3}\left[-30 - 0'3\cdot 100\right] = \boxed{-2'86\cdot 10^{-4}}$$

3

$$\gamma_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{G} \quad \begin{cases} \tau_{máx} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \dfrac{103+33}{2} = 68 \text{ MPa.} \\ G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \dfrac{210\cdot 10^3}{2(1+0'3)} = 80769'23 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma_{max} = 8'42\cdot 10^{-4} \text{ rad}}$$

4

$$\Omega_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{20}{80769'23} = 2'48\cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0'014^{\circ}$$

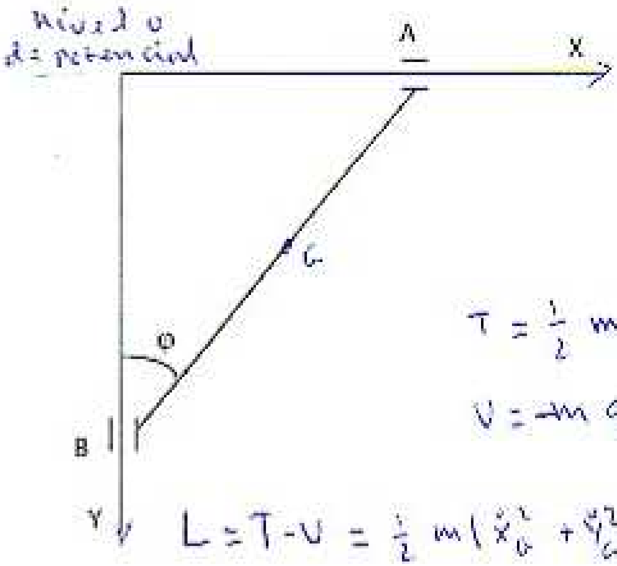
Ω disminuye $\Rightarrow \boxed{\Omega = 90 - 0'014 = 89'98^{\circ}}$

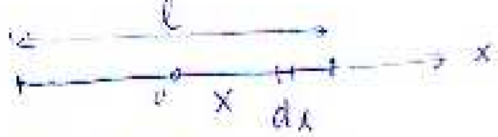
MECÁNICA

DICIEMBRE 2011

Una barra homogénea AB de masa m y longitud 2a puede moverse en un plano vertical XY de forma que el punto A desliza sin rozamiento por eje X, horizontal, y el B sobre el Y. El ángulo que forma la barra con eje Y es φ, tal como se indica en la figura.

Determinar la función lagrangiana del sistema y obtener, a partir de ella, las ecuaciones diferenciales del movimiento.





$dm = \lambda\, dx$

$J_z = 2\int_0^{l/2} x^2 \lambda\, dx = \frac{1}{12} m l^2$

$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m (2a)^2\right)\dot{\varphi}^2$

$V = -m g a \cos\varphi$

$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{6}\dot{\varphi}^2 m a^2 + m g a \cos\varphi$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$x_G \longrightarrow m\ddot{x}_G = 0$

$y_G \longrightarrow m\ddot{y}_G = 0$

$\varphi \longrightarrow \frac{1}{3}\ddot{\varphi} m a^2 - m g a \operatorname{sen}\varphi = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_G = a \operatorname{sen}\varphi \;,\; \dot{x}_G = a\dot{\varphi}\cos\varphi \\ y_G = a\cos\varphi \;;\; \dot{y}_G = -a\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{x}_G = a(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\varphi) \\ \ddot{y}_G = a(-\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \end{array}$$

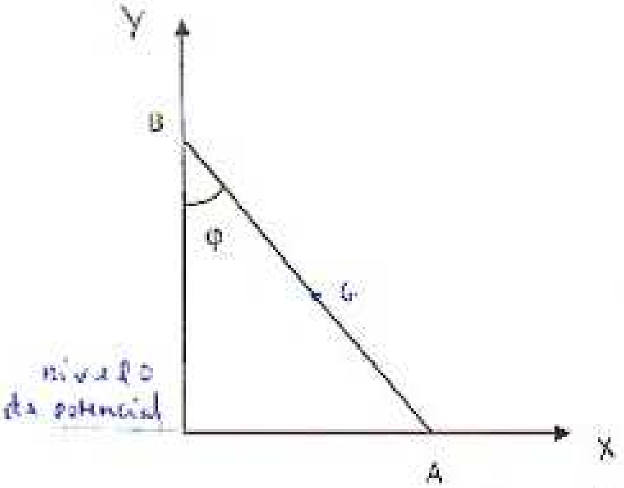
MECÁNICA (MULTIGRADO)

DICIEMBRE 2011

Se analiza el movimiento plano de una escalera que se apoya sobre una pared y suelo perfectamente lisos. El sistema se modela mediante una varilla rígida de masa m y longitud 2a, cuyo extremo A desliza sin rozamiento por el eje OX y el extremo B desliza sin rozamiento sobre el eje OY. La varilla cae apoyando sus extremos en los ejes coordenados, tal como se indica en la figura. Determinar la Lagrangiana del sistema y obtener, a partir de ella, las ecuaciones diferenciales del movimiento.

$dm = \lambda\, dx$

$J_z = 2\int_0^{\ell/2} x^2 \lambda\, dx = \frac{1}{12} m\ell^2$



$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m (2a)^2\right)\dot{\varphi}^2$

$V = mga\cos\varphi$

$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{6}\dot{\varphi}^2 ma^2 - mga\cos\varphi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

$x_G \rightarrow \quad m\ddot{x}_G = 0$

$y_G \rightarrow \quad m\ddot{y}_G = 0$

$\varphi \rightarrow \quad \frac{1}{3}\ddot{\varphi} ma^2 - mga\,\text{sen}\,\varphi = 0$

$x_G = a\,\text{sen}\,\varphi\ , \quad \dot{x}_G = a\dot{\varphi}\cos\varphi$

$y_G = a\cos\varphi\ ; \quad \dot{y}_G = -a\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi$

$\Rightarrow \quad \ddot{x}_G = a(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\varphi)$

$\ddot{y}_G = a(-\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$

Ec. ligadura

MECÁNICA FINAL de GRADO. ENERO-2011

Tiempo: 90 minutos

Fecha de publicación notas provisionales: 30-01-12

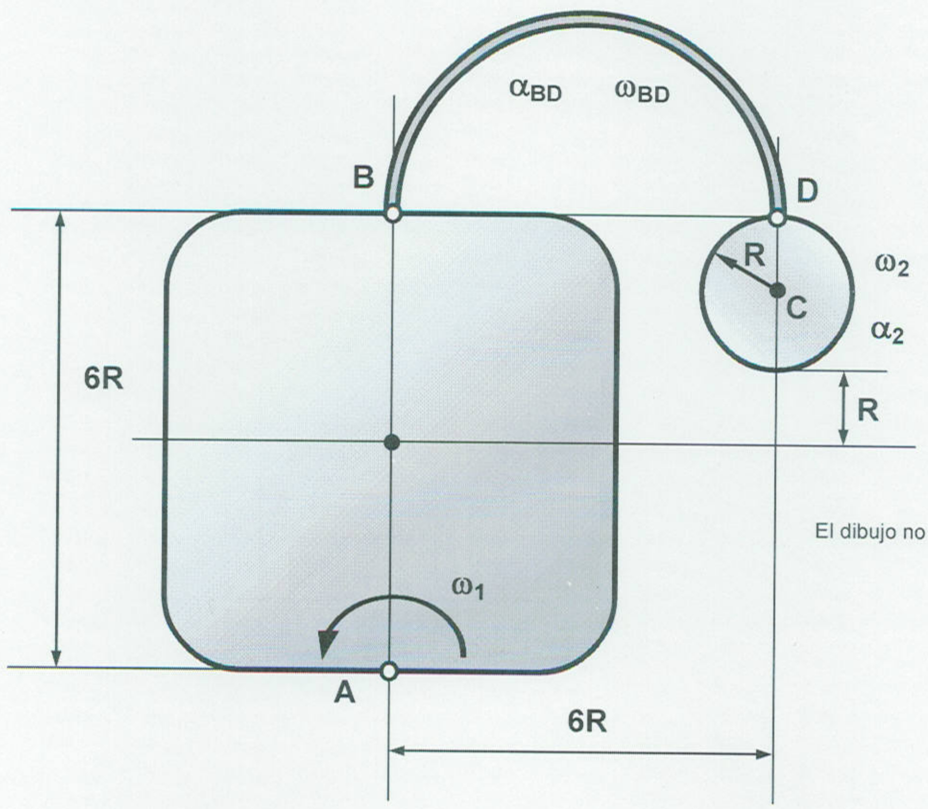
Fecha de revisión: Se anunciará en las notas provisionales

Puntuación: Tienen el mismo valor cada problema (10 puntos cada uno)

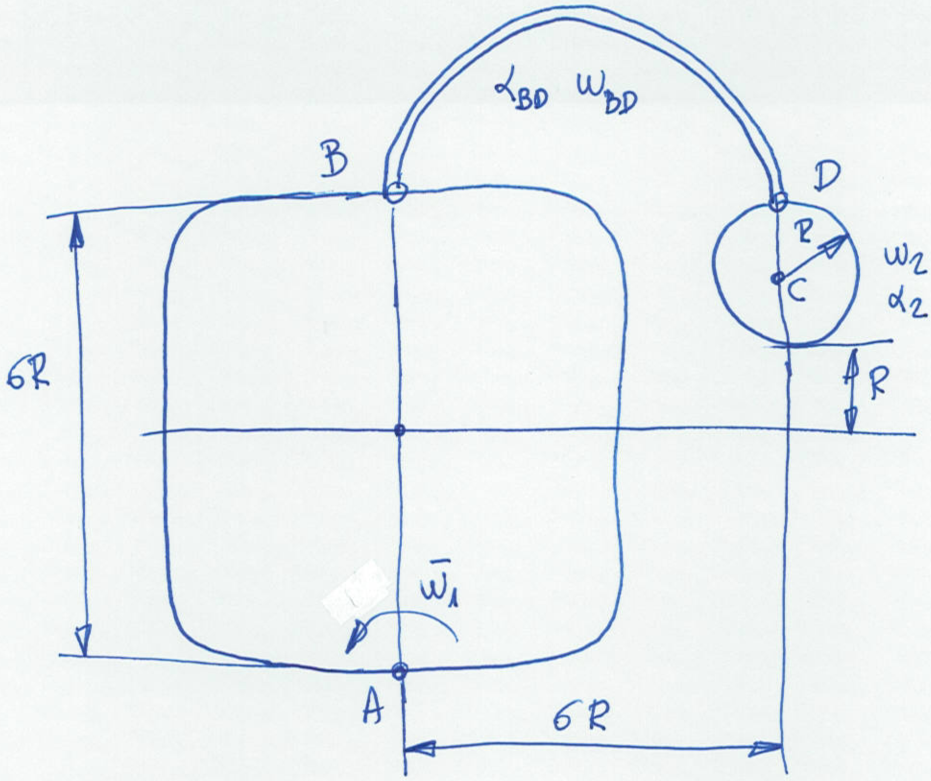
1. **Se tiene una placa cuadrada de lado 6R donde el punto A es fijo, un disco de centro C donde el centro es fijo y el radio R, y una barra curva BD como se muestra en la figura. Están colocados en un plano horizontal. Los puntos B y D son articulaciones que une la barra con la placa y el disco. La placa cuadrada se mueve con una velocidad angular ω_1 constante, siendo el sentido el indicado en la figura. Calcúlese de forma gráfica, obteniendo los resultados y en el instante indicado:**

a. **Velocidad y aceleraciones angulares de la barra BD (ω_{BD}, α_{BD}) y del disco de centro C_2 (ω_2, α_2). (5 puntos)**

b. **La velocidad y aceleración del disco de centro C_2 respecto de la placa cuadrada. (5 puntos)**



El dibujo no está a escala



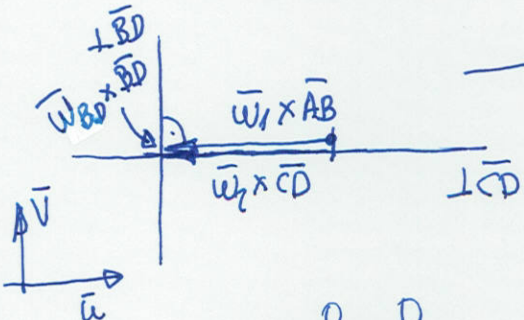
a.) $\bar{V}_B = \cancel{\bar{V}_A}^{\,0} + \bar{w}_1 \times \bar{AB}$

$\bar{V}_D = \bar{V}_B + \bar{w}_{BD} \times \bar{BD}$

$\bar{V}_D = \cancel{\bar{V}_C}^{\,0} + \bar{w}_2 \times \bar{CD}$

$V_D = \bar{w}_1 \times \bar{AB} + \bar{w}_{BD} \times \bar{BD}$

$\underbrace{\bar{w}_2}_{¿?} \times \bar{CD} = \bar{w}_1 \times \bar{AB} + \underbrace{\bar{w}_{BD}}_{¿?} \times \bar{BD}$



$\bar{w}_{BD} \times \bar{BD} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\bar{w}_{BD} = \bar{0}}$

$\bar{w}_1 \times \bar{AB} = \bar{w}_2 \times \bar{CD}$

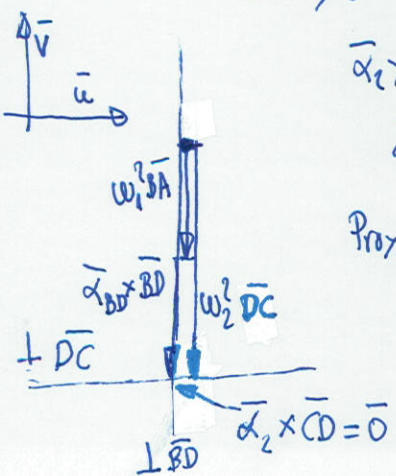
Proy$_u$; $-w_1 6R = -w_2 R$; $\boxed{w_2 = 6 w_1}$

$\bar{a}_B = \cancel{\bar{a}_A}^{\,0} + \cancel{\bar{\alpha}_1}^{\,0} \times \bar{AB} + w_1^2 \bar{BA}$

$\bar{a}_D = \bar{a}_B + \bar{\alpha}_{BD} \times \bar{BD} + \cancel{w_{BD}^2}^{\,0} \bar{DB}$

$\bar{a}_D = \cancel{\bar{a}_C}^{\,0} + \bar{\alpha}_2 \times \bar{CD} + w_2^2 \bar{DC}$

$\bar{a}_D = w_1^2 \bar{BA} + \bar{\alpha}_{BD} \times \bar{BD}$ $\Rightarrow$



$\bar{\alpha}_2 \times \bar{CD} + w_2^2 \bar{DC} = w_1^2 \bar{BA} + \bar{\alpha}_{BD} \times \bar{BD}$

$\bar{\alpha}_2 \times \bar{CD} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\bar{\alpha}_2 = \bar{0}}$

Proy$_v$; $-w_2^2 R = -w_1^2 6R - \alpha_{BD} 6R$

$36 w_1^2 = 6 w_1^2 + \alpha_{BD} 6$; $6 \alpha_{BD} = 36 w_1^2 - 6 w_1^2 = 30 w_1^2$

$$\boxed{\alpha_{BD} = \frac{30}{6} w_1^2 = 5 w_1^2}$$

b) Tomamos C y A que son fijos.

$\bar{u}$, $\bar{v}$

$$\bar{V}_C = \bar{V}_{ARR\,C/A} + \bar{V}_{REL_C} \ ; \quad \bar{V}_{REL_C} = \bar{V}_C - \bar{V}_{ARR\,C/A}$$

$$\bar{V}_C = \bar{0} \qquad \bar{V}_{ARR\,C/A} = \cancelto{0}{\bar{V}_A} + \bar{\omega}_1 \times \bar{AC}$$

pto fijo

$\bar{V}_{ARR\,C/A}$

$$Proy_u\, V_{arr\,C/A} = -\omega_1 5R$$

$$Proy_v\, V_{arr\,C/A} = \omega_1 6R$$

$$\bar{V}_{REL_C} = -\bar{V}_{ARR\,C/A}$$

$-\bar{V}_{ARR\,C/A}$, $\bar{V}_{REL_C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} Proy_u\, \bar{V}_{REL_C} = \omega_1 5R \\ Proy_v\, \bar{V}_{REL_C} = -\omega_1 6R \end{array}}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{ARR\,C/A} + \bar{a}_{COR\,C/A} + \bar{a}_{REL_C} \ ; \quad \bar{a}_{REL_C} = \bar{a}_C - \bar{a}_{ARR\,C/A} - \bar{a}_{COR\,C/A}$$

$$\bar{a}_C = \bar{0} \qquad \bar{a}_{ARR\,C/A} = \cancelto{0}{\bar{a}_A} + \cancelto{0}{\bar{\alpha}_1} \times \bar{AC} + \omega_1^2\, \bar{CA}$$

Pto fijo.

$a_{ARR\,AC}$

$$Proy_u\, \bar{a}_{ARR\,A/C} = -\omega_1^2 6R$$

$$Proy_v\, \bar{a}_{ARR\,A/C} = -\omega_1^2 5R$$

$$\bar{a}_{COR\,C/A} = 2\,\bar{\omega}_1 \times \bar{V}_{REL_C}$$

$a_{COR\,C/A}$, $2\omega_1$, $\bar{V}_{REL_C}$

$$Proy_u\, \bar{a}_{COR\,C/A} = 2\omega_1 \cdot \omega_1 6R = +12\,\omega_1^2 R$$

$$Proy_v\, \bar{a}_{COR\,C/A} = 2\omega_1 \cdot \omega_1 5R = +10\,\omega_1^2 R$$

$\bar{v}$, $\bar{u}$

$$\bar{a}_{REL_C} = -\bar{a}_{ARR\,C/A} - \bar{a}_{COR\,C/A}$$

a_{cor}, $-a_{ARR}$, a_{cor}, a_{ARR}, a_{REL_C}

$$\boxed{\begin{array}{l} Proy_u\, \bar{a}_{REL_C} = -\left[-\omega_1^2 6R + 12\,\omega_1^2 R\right] = -6\,\omega_1^2 R \\ Proy_v\, \bar{a}_{REL_C} = -\left[-\omega_1^2 5R + 10\,\omega_1^2 R\right] = -5\,\omega_1^2 R \end{array}}$$