1 Cinemática del sólido rígido. Traslación y rotación

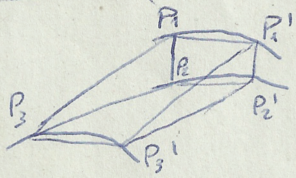
Sistemas de puntos:
- según la distribución (discontinuos si la distribución no es continua y continua si lo es)
- según su posición relativa (rígidos si no varía y deformables si varía)

La posición de un sistema de puntos respecto de un sistema de referencia, queda definida por el vector posición de cada punto. Si el sistema es rígido, la posición de cualquier punto queda determinada conociendo la posición de tres de sus puntos no situados en línea recta.

Los sistemas de puntos materiales continuos y rígidos se llaman sólidos rígidos o sólidos ideales.

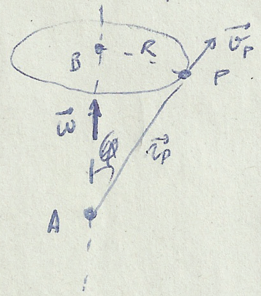
La determinación de cualquier movimiento del sólido rígido se reduce a la determinación de un movimiento de traslación y uno de rotación.

- Traslación (las velocidades de todos los puntos del sólido rígido son vectores iguales, vector traslación)



Las trayectorias que describen son idénticas.

- Rotación (permanecen fijos 2 puntos del sólido rígido y con ellos la recta que los une)



La rotación alrededor del eje está determinada por el vector deslizante velocidad angular $\vec{\omega}$ o vector rotación, cuyos elementos son:

Módulo: $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$; $\theta(t)$ ángulo que describen los puntos del sólido rígido en la rotación.

Dirección: la del eje de rotación

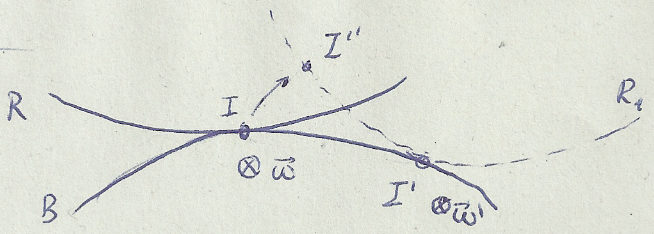
Sentido: dextrógiro (↺) al girar en el sentido del movimiento.

Velocidad de P: $\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P = \vec{\omega} \times \vec{AP}}$

La velocidad de un punto coincide con el momento estático de $\vec{\omega}$ respecto al punto.

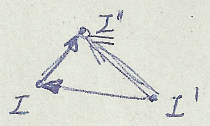
2.1 Aceleración del CIR

R ≡ ruleta } movimiento
B ≡ base



En el instante t, el Centro Instantáneo de Rotación es I, punto de tangencia de base y ruleta en dicho instante, y la velocidad angular es $\vec{\omega}$.

El punto I tiene velocidad nula en t por ser CIR, pero su aceleración es distinta de cero, ya que en el instante $t+\Delta t$, ha pasado a la posición I'', siendo en dicho instante el CIR el punto I' y su velocidad no es nula.



$$\vec{v}_I = 0 \qquad \vec{v}_{I''} = \vec{\omega}' \times \vec{I'I''}$$

$$\boxed{\vec{a}_I} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{I''} - \cancel{\vec{v}_I}^{\,0}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{I''}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\omega}' \times \vec{I'I''}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\omega}' \times (\vec{I'I} + \vec{II''})}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\vec{\omega}' \times \frac{\vec{I'I}}{\Delta t} \right) = \vec{\omega} \times \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\vec{I'I}}{\Delta t} \right) = \vec{\omega} \times (-\vec{W}) = \vec{W} \times \vec{\omega}$$

$\vec{W}$ ≡ velocidad propia del CIR

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\vec{\omega}' \times \frac{\vec{II''}}{\Delta t} \right) = \vec{\omega} \times \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\vec{II''}}{\Delta t} \right) = \vec{\omega} \times \vec{v} = 0$$

Por lo tanto, la aceleración del CIR viene dada por: $\boxed{\vec{a}_I = \vec{W} \times \vec{\omega}}$

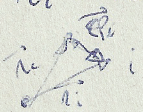
Módulo: wv ; Dirección: la normal común a la base (B) y a la ruleta (R) ; Sentido: hacia la ruleta (R)

(4) Centro de masas

Sea un sistema de puntos materiales $P_1, P_2, \ldots P_n$, de masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ y cuyos vectores de posición respecto de un punto O son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n$

Se define el Centro de masas C (único) del sistema de puntos materiales como el punto respecto del cual se verifica que: $\boxed{\sum_1^n m_i \vec{CP_i} = 0}$

$$\vec{CP_i} = \vec{r}_i - \vec{r}_c \longrightarrow \sum_1^n m_i \vec{r}_i - \left(\sum_1^n m_i\right) \vec{r}_c = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum_1^n m_i \vec{r}_i}{\sum_1^n m_i}}$$



vector posición del centro de masas.

Si se considera un triedro de masas ortogonal con origen en el punto O, las coordenadas del centro de masas son:

$$\boxed{x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}} \quad ; \quad \boxed{y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}} \quad ; \quad \boxed{z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}}$$

Si la distribución es continua: $\vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} x_c = \dfrac{\int x\, dm}{\int dm} \\ y_c = \dfrac{\int y\, dm}{\int dm} \\ z_c = \dfrac{\int z\, dm}{\int dm} \end{array} \right.$

integrales de línea → dist. material lineal

" " superficie → dist. " superficial

" " volumen → dist. " volumétrico

Para sistemas de puntos materiales, continuos o no, que presente simetría, según la regla de Arquímedes, el centro de masas se halla en el elemento de simetría correspondiente, punto, recta o plano.

Para sistemas de puntos materiales, continuos o no, constituidos por diferentes partes de los que se conocen las posiciones de sus respectivos centros de masas, según el principio de descomposición, el centro de masas del sistema se obtiene como si fuera un sistema de puntos materiales, cuyas masas son las de cada una de las partes situadas en sus respectivos centros de masas

5 Tensor de inercia

Sea un sistema de puntos materiales $P_1, P_2, \dots P_n$, de masas $m_1, m_2, \dots m_n$ y cuyos vectores de posición respecto de un punto O son $r_1, r_2 \dots r_n$.

El vector de inercia $\vec{I}_u$ asociado a la dirección definida en O por el vector unitario $\vec{u}$ es:

$$\vec{I}_u = \sum m_k \vec{r}_k \times (\vec{u} \times \vec{r}_k)$$

Si se consideran los vectores de inercia $\vec{I}_1, \vec{I}_2$ e $\vec{I}_3$, asociados en O a tres vectores unitarios ortogonales $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$, se obtiene: $\vec{I}_u = \vec{I}_1 u_1 + \vec{I}_2 u_2 + \vec{I}_3 u_3$

siendo u_1, u_2 y u_3, las componentes del vector $\vec{u}$ según los tres vectores unitarios mencionados.

Las proyecciones de $\vec{I}_u$ sobre $\vec{u}$ y sobre el plano perpendicular a $\vec{u}$ en O son:

$$I_{uu} = \vec{I}_u \cdot \vec{u} \quad ; \quad I_{uv} = \vec{I}_u \cdot \vec{v}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $\vec{I}_u$ se obtiene: $\begin{cases} I_{uu} = \sum m_k \left[r_k^2 - (\vec{r}_k \cdot \vec{u})^2 \right] \\ I_{uv} = -\sum m_k (\vec{r}_k \cdot \vec{u}) \cdot (\vec{r}_k \cdot \vec{v}) \end{cases}$

Como se observa I_{uu} es el momento de inercia axial respecto de la recta de vector unitario $\vec{u}$, e I_{uv}, es el producto de inercia, cambiando de signo con respecto a dos planos cuyos vectores unitarios normales son $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Por tanto: $I_{ij} = \sum m_k \left[r_k^2 \delta_{ij} - (\vec{r}_k \cdot \vec{u}_i)(\vec{r}_k \cdot \vec{u}_j) \right]$ $\delta_{ij} \to$ delta de Kronecker.

Puesto que las componentes de los vectores de inercia $\vec{I}_1, \vec{I}_2$ e $\vec{I}_3$ en O, tienen como componentes los I_{ij}, el vector de inercia $\vec{I}_u$ asociado en O a $\vec{u}$ puede ponerse de la forma: $\vec{I}_u = \vec{u} \cdot \vec{\vec{I}} \longrightarrow [I_i] = [u_i] \cdot [I_{ij}]$

Los elementos de la matriz tensor de inercia, $[I_{ij}]$, se denominan componentes escalares del tensor. Sus filas son las componentes vectoriales del tensor I_1, I_2 e I_3.

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de inercia, son los momentos de inercia respecto a tres rectas ortogonales entre sí en O, y los restantes elementos son los productos de inercia, cambiados de signo, respecto a las parejas de planos que definen en O las rectas mencionadas.

Al ser simétrico el tensor de inercia: $\vec{I}_u = \vec{\vec{I}} \cdot \vec{u}$

Si el punto O coincide con el centro de masas del sistema material, el tensor de inercia se denomina tensor central de inercia.

7.1 Ejes permanentes y espontáneos de rotación

Sea un sólido rígido que mantiene un eje fijo definido por dos de sus puntos O_1 y O_2.

1er caso: las fuerzas directamente aplicadas equivalen a una única fuerza que pasa por O_1, y se trata de determinar las condiciones para que la fuerza de ligadura en O_2 sea nula, es decir, que el punto O_2 no sea fijo.

Según el th. del momento cinético respecto al punto fijo O_1: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=0}$

$\vec{L}$ = momento cinético, es un vector giratorio con el sistema móvil, pero si según $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ no ha de variar con el tiempo, entonces ha de ser coolineal con $\vec{\omega}$, es decir, que el eje de giro ha de ser principal de inercia en O_1, y además ser cte el módulo de $\vec{\omega}$.

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{O_1xyz}+\vec{\omega}\times\vec{L}=0$$

→ Si un sólido rígido con un punto fijo comienza un movimiento de rotación alrededor de un eje principal de inercia en dicho punto, el movimiento de rotación persistirá indefinidamente con $|\vec{\omega}|$ = cte. Estos ejes se llaman ejes permanentes de rotación.

2º caso: El sólido rígido no está sometido a fuerzas directamente aplicadas, y se trata de determinar las condiciones para que las fuerzas de ligadura en O_1 y O_2 sean nulas, es decir, que los puntos O_1 y O_2 no sean fijos.

Th. centro de masas: $M\cdot\vec{a}_C=0$ → ha de ser cte la velocidad del centro de masas para lo cual este ha de estar en el eje de rotación.

Th. del momento cinético con el punto fijo O_1: $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ → como se ha visto antes, el eje de rotación ha de ser principal ~~de~~ de inercia en O_1, que en este caso será principal central de inercia al contener al centro de masas C.

→ Si un sólido rígido libre comienza un movimiento de rotación alrededor de un eje principal central de inercia, el movimiento de rotación persistirá indefinidamente con $|\vec{\omega}|$ = cte. Estos ejes se llaman ejes espontáneos de rotación.

7.2 Equilibrados estático y dinámico

Sea un sólido rígido en movimiento de rotación, de $\omega = cte$, alrededor de un eje fijo definido por los puntos O_1 y O_2 y tal que su centro de masas se halle a la distancia S del eje de rotación

→ Según el th. del centro de masas: $\boxed{\vec{R} = M \cdot \vec{a}_c}$

Siendo $\vec{R}$ la resultante de las fuerzas exteriores, que son el peso $\vec{F}$ del sólido rígido, considerada como fuerza directamente aplicada, las fuerzas de ligadura estáticas en O_1 y O_2, $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ respectivamente y las fuerzas de ligadura dinámicas en O_1 y O_2, $\vec{R}_1'$ y $\vec{R}_2'$ respectivamente.

Teniendo en cuenta que el peso y las fuerzas de ligadura estáticas constituyen un sistema de fuerzas nulo, para lo cual ha de ser nula la resultante y su momento resultante:

$$\boxed{\vec{R}_1' + \vec{R}_2' = M \cdot \frac{v_c^2}{S} \vec{n}}$$

Las fuerzas $\vec{R}_1'$ y $\vec{R}_2'$ son giratorias, al serlo el vector $\vec{n}$, y de gran magnitud. (En el caso de que el centro de masas diste 1mm del eje de rotación y que la velocidad angular sea 3000 rev/min, su orden de magnitud resulta ser aproximadamente 10 veces el peso del sólido rígido, ejerciéndose en los puntos O_1 y O_2, generalmente apoyos del eje de una máquina.

→ Según el th. del momento cinético respecto al centro de masas: $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \xrightarrow{\vec{\omega}=cte} \boxed{\vec{N} = \vec{\omega} \times \vec{L}}$

Si en el momento de las fuerzas exteriores se excluye el momento del peso y de las fuerzas de ligadura estáticas, por ser un sistema nulo, además de estar excluido el de otras fuerzas directamente aplicadas al ser constante la velocidad angular se tiene:

$$\boxed{\vec{N}' = \vec{\omega} \times \vec{L}}$$

Siendo $\vec{N}'$ el momento de fuerzas de ligadura ~~dinámica~~ dinámica únicamente.

De $\vec{R}_1' + \vec{R}_2' = M \frac{v_c^2}{S} \vec{n}$ y $\vec{N}' = \vec{\omega} \times \vec{L}$, se obtienen las fuerzas de ligadura dinámicas $\vec{R}_1'$ y $\vec{R}_2'$

Equilibrado estático: cuando el centro de masas se halla en el eje de rotación, ya que abandonando la acción de la gravedad el sólido rígido no se mueve.

$\boxed{\vec{R}_1' + \vec{R}_2' = 0}$ → Es nula la resultante de las fuerzas de ligadura dinámicas, pero individualmente no.

Equilibrado dinámico: cuando son nulas las fuerzas de ligadura dinámicas, es decir, que constituyen un sistema de fuerzas nulo, para lo cual ha de ser nula su resultante y su momento resultante $\vec{N}'$. La anulación de la resultante implica que el centro de masas se halle en el eje de rotación, es decir, que se cumpla $\boxed{\vec{R}_1' + \vec{R}_2' = 0}$ y la anulación del momento resultante da:

$\boxed{\vec{\omega} \times \vec{L} = 0}$ → $\vec{L}$ colineal con $\vec{\omega}$, por lo que el eje de rotación ha de ser principal central de inercia.