Modelización y Análisis Numérico

Taller 1

Semana del 23 al 27 de Febrero de 2015

1. Se busca u: $[0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$-\frac{d}{dx}\left[(1+x)u'\right] = x =$

$$-\frac{d}{dx}\left[(1+x)\frac{du}{dx}\right] = x \qquad o < x < 2$$

$= -u''(1+x) - u' = x$

$$u(0) = u(2) = 0$$

0 0,5 1 1,5 2

función test $v \in C^1[0,2]$

$v(0)=0$

$v(2)=0$

a) Establecer la formulación débil del problema. (x función test + integración)

b) $h = \frac{1}{2}$; $x_j = jh$, $j = 0,1,\ldots,4$. Aplicar el método de Galerkin para aproximar la solución del problema, en el caso en que el espacio aproximador V_h esté generado por una base de funciones polinominales a trozos de grado 1, en el soporte indicado. Calcular la matriz de rigidez y el vector de fuerzas que se obtienen mediante el método de elementos finitos en este caso.

EN CASA *

2. Se busca u: $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$-u''(x) + u(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(1) = 1$$

0 0,25 0,50 0,75 1

a) Establecer su formulación débil del problema.

b) n entero positivo; $h = \frac{1}{4}$; $x_j = jh$, $j = 0,1,\ldots,4$.
Definir el espacio aproximador V_h mediante el cálculo de las funciones de base correspondientes polinomiales a trozos de grado 1.

c) Calcular la matriz de rigidez y el vector de cargas obtenidos al aplicar el MEF de grado 1 a la resolución aproximada del problema. Emplear la fórmula de trapecios compuesta para las integrales numéricas, cuando sea necesario.

TALLER 1

1.) $-\frac{d}{dx}\left[(1+x)\frac{du}{dx}\right]=x \quad 0<x<2 \longrightarrow -u''(1+x)-u'=x$

$u(0)=u(2)=0$

TEST

$v \in C^1[0,2]$

$v(0)=v(2)=0$

a.)

$$\underbrace{\int_0^2 -u''(1+x)v(x)\,dx}_{\text{PARTES}} - \int_0^2 u'\cdot v(x)\,dx = \int_0^2 x\,v(x)\,dx$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u''dx = dv \rightarrow v = u'$

$(1+x)v(x) = u \rightarrow du = [v'(x)(1+x)+v(x)]$

$$\cancel{\left[(1+x)(v(x))\cdot u'\right]_0^2}^{\,0} - \int_0^2 u'\,[v'(x)(1+x)+v(x)]\,dx$$

$$\int_0^2 u'v'(x)(1+x)\,dx + \cancel{\int_0^2 u'v(x)\,dx} - \cancel{\int_0^2 u'v(x)\,dx} = \int_0^2 x\,v(x)\,dx$$

"Hallar $u \in C^1[0,2]$, $u(0)=u(2)=0$

$$\boxed{\int_0^2 u'v'(x)(1+x)\,dx = \int_0^2 x\,v(x)\,dx \quad \forall v \in C^1[0,2],\ v(0)=v(2)=0}$$"

$V = C^1[0,2]$

b.) $u_h \in V_h$

$\{\varphi_1,\dots,\varphi_5\} \quad u_h=\sum_{i=1}^{5} u_i\varphi_i \quad v_h=\varphi_j \quad j=1,\dots,5$

"Aproximada hallar $u_h \in C^1[0,2]$, $u_h(0)=u_h(2)=0$

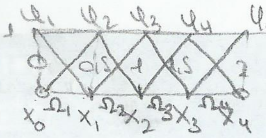
$$\int_0^2 u_h' v'(x)(1+x)\,dx = \int_0^2 x\,v_h\,dx \quad \forall v_h \in V_h,\ v_h(0)=v_h(2)=0$$"

$$\sum_{i=1}^{5}\int_0^2 (1+x)\left(\varphi_i'\varphi_j'\,dx\right)u_i = \int_0^2 x\,\varphi_j\,dx \quad j=1,\dots,5$$

$[A]\{u_i\}=\{f_j\}$

$A_{ij}=\int_0^2 (1+x)\varphi_i'\varphi_j'\,dx$

$f_j=\int_0^2 x\,\varphi_j\,dx$



$$\varphi_1 = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \dfrac{x - 0.5}{0 - 0.5} = -2x + 1 & x \in [0, 0.5] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow \varphi_1' = \begin{cases} -2 & x \in [0, 0'5] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{x - 0}{0.5 - \cancel{0}} = 2x & x \in [0, 0'5] \\ \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{x - 1}{0.5 - 1} = 2 - 2x & x \in [0'5, 1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow \varphi_2' = \begin{cases} 2 & x \in [0, 0'5] \\ -2 & x \in [0'5, 1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{x - 0.5}{1 - 0.5} = 2x + 1 & x \in [0'5, 1] \\ \dfrac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \dfrac{x - 1.5}{1 - 1.5} = -2x + 3 & x \in [1, 1'5] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow \varphi_3' = \begin{cases} 2 & x \in [0'5, 1] \\ -2 & x \in [1, 1'5] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\varphi_4 = \begin{cases} \dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{x - 1}{1.5 - 1} = 2x - 2 & x \in [1, 1'5] \\ \dfrac{x - x_4}{x_3 - x_4} = \dfrac{x - 2}{1.5 - 2} = -2x + 4 & x \in [1'5, 2] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow \varphi_4' = \begin{cases} 2 & x \in [1, 1'5] \\ -2 & x \in [1'5, 2] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\varphi_5 = \begin{cases} \dfrac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \dfrac{x - 1'5}{2 - 1'5} = 2x - 3 & x \in [1'5, 2] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow \varphi_5' = \begin{cases} 2 & x \in [1'5, 2] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Los coeficientes de los extremos son nulos (pasamos de una matriz de 5x5 a una de 3x3)

Necesitamos calcular: A_{22}, A_{33}, A_{44} (diagonal ppal) A_{23} y A_{34}

$$\begin{bmatrix} \circledast & * & 0 \\ & \circledast & * \\ 0 & & \circledast \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \int_0^{0.5} 4(1+x)\,dx + \int_{0.5}^{1} 4(1+x)\,dx = 6$$

$$A_{33} = \int_0^2 (1+x)\,\varphi_3'\,\varphi_3'\,dx = \int_{0.5}^{1} (1+x)4\,dx + \int_1^{1.5} 4(1+x)\,dx = \int_{0.5}^{1} (4+4x)\,dx + \int_1^{1.5} (4+4x)\,dx =$$

$$= 4x + 2x^2 \Big]_{0.5}^{1} + 4x + 2x^2 \Big]_1^{1.5} = \left[4 + 2 - 2 - 0.5\right] + \left[6 + 4.5 - 4 - 2\right] = -2.5 + 10.5 = 8$$

$$A_{44} = \int_1^{1.5} (4+4x)\,dx + \int_{1.5}^{2} (4+4x)\,dx = \left(4x + 2x^2\right]_1^{1.5} + \left[4x + 2x^2\right]_{1.5}^{2} = 10$$

$$A_{23} = \int_0^{0.5} \cancel{(1+x)\,2\cdot 0}^{\,0}\,dx + \int_{0.5}^{1} (1+x)(-2)2\,dx + \int_1^{1.5} \cancel{(1+x)\,0}^{\,0}(-2)\,dx = -3.5$$

$$A_{34} = \int_1^{1.5} (1+x)\cdot 2\cdot(-2) = \int_1^{1.5} (-4 - 4x)\,dx = 4.5 = -\frac{9}{2}$$

$\to f_j \int_0^2 x\varphi_j\,dx$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3.5 & 0 \\ -3.5 & 8 & 4.5 \\ 0 & 4.5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

con $u_0 = 0$
$u_4 = 0$

Modelización y Análisis Numérico

Taller 2

Semana del 2 al 6 de Marzo de 2015.

1. Resolver aproximadamente por el método de elementos finitos:

$k=1$

$$\left[k(x)\frac{du}{dx}\right]' \to (k u')' \to -k u''$$

$$\begin{cases} u'' = \delta(x-1) + f(x) \\ u(-2) = 1 \qquad\qquad x \in (-2,2) \\ -u'(2) + u(2) = 0 \end{cases}$$

Donde: $f(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x \leq 0 \\ 0 & 0 < x < 2 \end{cases}$

con 4 elementos de igual tamaño y funciones de base lineales a trozos.

a) Empleando el procedimiento de la aproximación global en todo el dominio.
b) Empleando el procedimiento de la aproximación local en cada elemento y su posterior ensamblaje.
c) Extraer conclusiones de la comparación de ambos procedimientos.

TALLER 2:

$$\begin{cases} u'' = \delta(x-1) + f(x) \\ u(-2) = 1 \\ -u'(2) + u(2) = 0 \end{cases} \qquad x \in (-2,2)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

4 elementos de igual tamaño : $h = 1$
funciones de base lineales.

$v(-2) = 0$

$$\int_{-2}^{2} u'' v\,dx = \int_{-2}^{2} \delta(x-1)\, v\,dx + \int_{-2}^{2} f(x)\, v\,dx$$

$$u'v\Big|_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} u'v'\,dx = v(1) + \int_{-2}^{0} v\,dx \longrightarrow u'(2)v(2) - u'(-2)\cancel{v(-2)}^{0} - \int_{-2}^{2} u'v'\,dx = v(1) + \int_{-2}^{0} v\,dx$$

$$u(2)v(2) - \int_{-2}^{2} u'v'\,dx = v(1) + \int_{-2}^{0} v\,dx$$

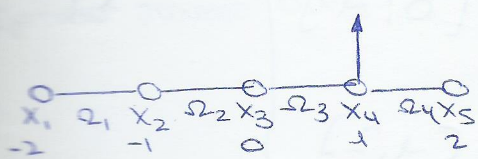
(*) Hallar $u \in H^1(-2,2)$, $u(-2) = 1$

$$-\int_{-2}^{2} u'v'\,dx + u(2)v(2) = \int_{-2}^{0} v\,dx + v(1) \quad \forall v \in H^1(-2,2) \text{''} \quad v(-2) = 0$$

← FORMULACIÓN DÉBIL

Hallar $u_h \in H^h$, $u_h(-2) = 1$ ← PROBLEMA APROXIMADO

$$-\int_{-2}^{2} u_h' v_h'\,dx + u_h(2)v_h(2) = \int_{-2}^{0} v_h\,dx + v_h(1) \quad \forall v_h \in H^1(-2,2) \text{''} \quad v_h(-2) = 0$$



			φ'
$\varphi_1 =$	$1-x$	$[-2,-1]$	-1
	0	resto	0
$\varphi_2 =$	$x+2$	$[-2,-1]$	1
	$-x$	$[-1,0]$	-1
	0	resto	0
$\varphi_3 =$	$x+1$	$[-1,0]$	1
	$1-x$	$[0,1]$	-1
	0	resto	0

			φ'
$\varphi_4 =$	x	$[0,1]$	1
	$2-x$	$[1,2]$	-1
	0	resto	0
$\varphi_5 =$	$x-1$	$[1,2]$	1
	0	resto	0

Comprobar

(*) MATRIZ DE RIGIDEZ:

$i,j = 1,\dots,5$ $\quad K_{ij} = -\int_{-2}^{2} \varphi_i' \varphi_j'\,dx + \varphi_i(2)\varphi_j(2)$

$$F_j = \int_{-2}^{0} \varphi_j\,dx$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*) Sigue

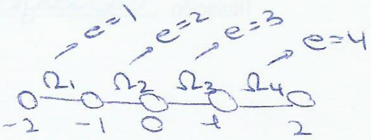
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\1/2\\1\\0\end{pmatrix}$$

ⓐ Quitando 1ª fila y 1ª columna. y en la f_2 restamos $K_{12} \cdot u_1$

(Falta la aproximación local.) ("e")

b.) $$-\int_{x_1^e}^{x_2^e} u_h'^e v_h'^e \, dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} v_h^e \, dx + \sigma(x_1^e)\varphi_j^e(x_1^e) - \sigma(x_2^e)\varphi_j^e(x_2^e) \qquad j=1,2$$

$$u_h^e = \sum_{i=1}^{2} u_i^e \varphi_i^e(x)$$
$$v_h^e = \varphi_j^e(x)$$



$e=1 \rightarrow \varphi_1^1 =$

$\varphi_2^1 =$

$$-\sum_{i=1}^{2}\underbrace{\left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_i^{e'} \varphi_j^{e'} dx\right]}_{K_{ij}^e} u_i^e = \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_j^e \, dx}_{f_j^e} + \sigma(x_1^e)\varphi_j^e(x_1^e) - \sigma(x_2^e)\varphi_j^e(x_2^e)$$

$$e\begin{cases} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e = f_1^e + \sigma(x_1^e) \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e = f_2^e - \sigma(x_2^e)\end{cases}$$

$$\boxed{e=1}\begin{cases} K_{11}^1 u_1 + K_{12}^1 u_2 = f_1^1 + \sigma(x_1) \Rightarrow -u_1 + u_2 = 0.5 + \sigma \\ K_{21}^1 u_1 + K_{22}^1 u_2 = f_2^1 - \sigma(x_2) \Rightarrow \end{cases}$$
$u_1 - u_2 = 0.5 + \sigma(-1$

$$K_{11}^1 = -\int_{-2}^{-1}(-1)(-1)\,dx = -x\Big]_{-2}^{-1} = +1-2 = -1 \qquad K_{12}^1 = -\int_{-2}^{-1}(-1)(1)\,dx = x\Big]_{-2}^{-1} = 1$$

$$K_{21}^1 = -\int_{-2}^{-1} 1(-1)\,dx = 1 \qquad K_{22}^1 = -\int_{-2}^{-1} 1\cdot 1\,dx = -1$$

$e=1$ $\quad \varphi_1^1 = 1 - \dfrac{x-(-2)}{-1-(-2)} = -1-x \qquad \varphi_1^2 = \dfrac{x-(-2)}{-1-(-2)} = +x+2 \qquad [-2,-1]$

$e=2$ $\quad \varphi_1^2 = 1 - \dfrac{x-(-1)}{0-(-1)} = -x \qquad \varphi_2^2 = \dfrac{x-(-1)}{0-(-1)} = x+1 \qquad [-1,0]$

$e=3$ $\quad \varphi_1^3 = 1 - \dfrac{x-0}{1-0} = 1-x \qquad \varphi_2^3 = \dfrac{x-0}{1-0} = x \qquad [0,1]$

$e=4$ $\quad \varphi_1^4 = 1 - \dfrac{x-1}{2-1} = 2-x \qquad \varphi_2^4 = \dfrac{x-(1)}{2-1} = x-1 \qquad [1,2]$

$\varphi_1^{e'}$	$\varphi_2^{e'}$
-1	1
-1	1
-1	1
-1	1

$$f_j^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_j^e \, dx \longrightarrow f_1^1 = 0.5 \quad f_2^2 = -0.5 \quad f_1^4 = 0$$
$f_2^1 = 0.5 \quad f_1^3 = 0 \quad f_2^4 = 0$

$f_2^3 = 0$

$f_2^1 = 0.5$

[f^3 y $f^4 = 0$ porque en ese intervalo $f = 0$]

$$f_1^1 = \int_{-2}^{-1}(-1-x)\,dx = -\int_{-2}^{-1}(x+1)\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big]_{-2}^{-1} - x\Big]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} + 1 - \cancel{2} = \frac{1}{2}$$

$$f_2^1 = \int_{-2}^{-1}(x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + 2x\Big]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} + (-2) + 4 =$$

$e=1$ $\begin{cases} k^1_{11}u_1 + k^1_{12}u_2 = f^1_1 + \sigma(x_1) \Rightarrow -u_1 + u_2 = 0{,}5 + \sigma(-2) \\ k^1_{21}u_1 + k^1_{22}u_2 = f^1_2 - \sigma(x_2^-) \Rightarrow u_1 - u_2 = 0{,}5 + \sigma(-1^-) \end{cases}$

$e=2$ $\begin{cases} k^2_{11}u_2 + k^2_{12}u_3 = f^2_1 + \sigma(x_2^+) \Rightarrow -u_2 + u_3 = 0{,}5 + \sigma(-1^+) \\ k^2_{21}u_2 + k^2_{22}u_3 = f^2_2 - \sigma(x_3^-) \Rightarrow u_2 - u_3 = -0{,}5 - \sigma(0^-) \end{cases}$

$e=3$ $\begin{cases} k^3_{11}u_3 + k^3_{12}u_4 = f^3_1 + \sigma(x_3^+) \Rightarrow -u_3 + u_4 = \sigma(0^+) \\ k^3_{21}u_3 + k^3_{22}u_4 = f^3_2 + \sigma(x_4^-) \Rightarrow u_3 - u_4 = \sigma(1^-) \end{cases}$

$e=4$ $\begin{cases} k^4_{11}u_4 + k^4_{12}u_5 = f^4_1 + \sigma(x_4^+) \Rightarrow -u_4 + u_5 = \sigma(1^+) \\ k^4_{21}u_4 + k^4_{22}u_5 = f^4_1 + \sigma(x_5) \Rightarrow u_4 - u_5 = -\sigma(2) \end{cases}$

ENSAMBLAJE:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \underbrace{-1-1}_{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sigma(-2) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + [\![\sigma(-1)]\!] \\ 0 + \frac{1}{2} + [\![\sigma(0)]\!] \\ 0 + [\![\sigma(1)]\!] \\ 0 - \sigma(2) \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sigma(-2) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad -1 \\ 0 + \frac{1}{2} \\ 0 + 1 \\ 0 + \underbrace{\sigma(2)}_{} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow -u_5$ (*) Pasa con signo $\ominus$ al 1er miembro

SALTOS: (enunciado)

$[\![\sigma(-1)]\!] = 0$

$[\![\sigma(0)]\!] = 0$

$[\![\sigma(1)]\!] = 1$

$\boxed{u_1 = 1}$ (*)

C.I:

$-u'(2) + u(2) = 0$.

$\sigma(2) = -u'(2) = u(2) = u_5$

¡EXAMEN!

@ Ejercicio propuesto 5, 6 y 7.

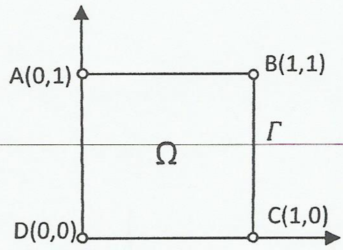
Modelización y Análisis Numérico

Taller 3

Semana del 16 al 21 de Marzo de 2015

1.- Dado el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = x + y, \ en\, \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u = 0, \ en\, \Gamma \end{cases}$$



Calcular la formulación débil y demostrar que tiene una solución única.

2.- Para el mismo enunciado que el ejercicio 1, pero aplicando la siguiente condición de contorno:

$$u = x + y, \qquad en\, \Gamma$$

Calcular la formulación débil y demostrar nuevamente que tiene solución única.

TALLER 3:

1) Formulación débil:

$$\begin{cases} -\Delta u = x+y \\ u=0 \end{cases} \rightarrow -\int_\Omega \Delta u v\,dxdy = \int_\Omega f v\,dxdy \rightsquigarrow \text{Green: } \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dxdy - \cancel{\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS} = \int_\Omega f v\,dxdy$$

$v=0$

"Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\underbrace{\int_0^1\int_0^1 \nabla u \nabla v\,dxdy}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1\int_0^1 (x+y) v\,dxdy}_{f(v)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)"$$

Aplicamos L-M: $a(u,v)\begin{cases}\text{bilineal}\\ \text{continua}\\ \text{elíptica}\end{cases}$

1) BILINEAL:

$$a(u+w,v) = \int_\Omega \nabla(u+w)\nabla v\,dxdy = \int_\Omega [\nabla u + \nabla w]\nabla v\,dxdy = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dxdy + \int_\Omega \nabla w \nabla v\,dxdy = a(u,v) + a(w,v)$$

$$a(u, v+w) = \int_\Omega \nabla u \nabla(v+w)\,dxdy = a(u,v) + a(u,w)$$

$$a(\lambda u, v) = \int_\Omega \nabla(\lambda u)\nabla v\,dxdy = \lambda \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dxdy = \lambda\, a(u,v)$$

(Es simétrico, pero no siempre va a serlo

2) CONTINUA:

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

$$\circledast\ \|u\|_{1,\Omega}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{1,\Omega}^2$$

$$\left|\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dxdy\right| \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dxdy\right)^{1/2} = |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

C-S
Lo separa 2 funciones.

$$|u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega}$$

3.) ELÍPTICA:

$$a(v,v) \geq \alpha \cdot \|v\|^2_{1,\Omega}$$

$$a(v,v) = \int |\nabla v|^2 dxdy = |v|^2_{1,\Omega} \geq \left(\frac{1}{1+C^2}\right) \cdot \|v\|^2_{1,\Omega}$$ [Repaso del otro día]

$$\|v\|^2_{1,\Omega} = \|v\|^2_{0,\Omega} + |v|^2_{1,\Omega} = (1+C^2)|v|^2_{1,\Omega}$$

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \cdot |v|_{1,\Omega}$$

$f(v)$ → LINEAL, → CONTINUA

1) Lineal: $f(\lambda x+\beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y)$ → OBVIO. (En un examen no

2.) CONTINUA:

$$|f(v)| = \left|\int_\Omega f v \, dxdy\right| \underset{C\text{-}S}{\leq} \left(\int_\Omega |f|^2 dxdy\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dxdy\right)^{1/2} = M\|v\|_{0,\Omega} \leq M\|v\|_{1,\Omega}$$

$$\left|\int_0^1\int_0^1 (x+y)v\,dxdy\right| \leq \underbrace{\left(\int_0^1\int_0^1 (x+y)^2 dxdy\right)^{1/2}}_{*} \left(\int_0^1\int_0^1 |v|^2 dxdy\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{7}{6}}\|v\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{\frac{7}{6}}\|v\|_{1,\Omega}$$

$$* \int_0^1\int_0^1 (x^2+2xy+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left[x^2y + xy^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2+x+\frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

17/4/2015

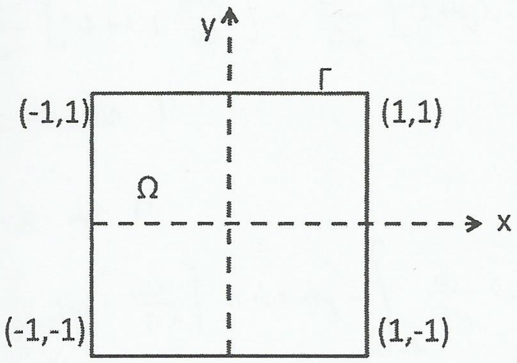
Modelización y Análisis Numérico

Curso 2014-15

Taller 4

Viernes 17 de Abril de 2015

En el cuadrado Ω, de lado 2, de la figura de frontera Γ, se plantea el problema de contorno siguiente:



$$\text{" } Hallar\ u\colon \Omega \to \mathbb{R},\ tal\ que:$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=1+x^2+y^2$$

$$u = 0\ en\ \Gamma\text{"}$$

1. Establecer su formulación débil.

2. Se subdivide Ω en 4 elementos triangulares de igual tamaño (cada uno de ellos con dos nodos en vértices del contorno y el tercero en el origen de coordenadas).

   Construir la solución aproximada mediante el método de elementos finitos, utilizando 4 elementos triangulares y polinomios aproximadores a trozos de grado 1 en cada elemento.

   Utilizar para el cálculo numérico de cada integral la expresión:

$$\iint_K g(x,y)dxdy \approx \frac{g(s_1)+g(s_2)+g(s_3)}{3}\cdot \text{Área } K$$

   Donde s_1, s_2, s_3 son los tres vértices del triángulo K.

TALLER 4:

"Hallar $u: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[(1+y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 1+x^2+y^2.$$

$u=0$ en Γ"

1.) $v=0$ en Γ

$$-\int \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] v\,dx\,dy - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}(1+y)\frac{\partial u}{\partial y}\, v\,dx\,dy = \int_\Omega (1+x^2+y^2)\,v\,dx\,dy$$

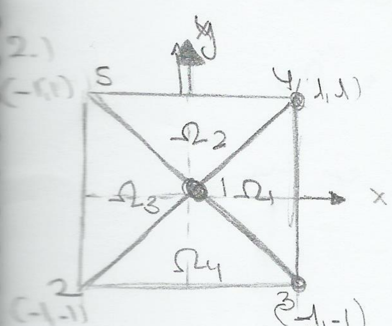
↳ P. Partes ↳ P. Partes

FD: "Hallar $u_h \in H_0^{1h}(\Omega)$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[(1+x)\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial v_h}{\partial x} + (1+y)\frac{\partial u_h}{\partial y}\frac{\partial v_h}{\partial y}\right]dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+x^2+y^2)\,v_h\,dx\,dy$$

$\forall\, v_h \in H_0^{1h}(\Omega)$"

2.)



$u_h = \sum u_i \varphi_i = u_1\varphi_1$ Porque $u=0$ en Γ

↳ $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$.

$v_h = \varphi_i$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \to a_1 + a_2 x + a_3 y$

a) $\varphi_1(\Omega_1)$ $\quad \varphi_1 \begin{cases} 1 & (0,0) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \to A + Bx + Cy \begin{cases} A = 1 \\ A + B + C = 0 \\ A + B - C = 0 \end{cases}$

$2A + 2B = 0 \quad \boxed{B = -1} \quad C = 0$

$\varphi_1(\Omega_1) = 1 - x$

b) $\varphi_1(\Omega_2)$ $\quad \varphi_1 \begin{cases} 1 & (0,0) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \to A + Bx + Cy \begin{cases} \boxed{A = 1} \\ A + B + C = 0 \\ A - B + C = 0 \end{cases} \to \varphi_1(\Omega_2) = 1 - y$

$2A + 2C = 0 \quad \boxed{C = -1}$

$B = 0$

c) $\varphi_1(\Omega_3)$ $\quad \varphi_1 \begin{cases} 1 & (0,0) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \to A + Bx + Cy \begin{cases} A = 1 \\ A - B + C = 0 \\ A - B - C = 0 \end{cases}$

$2A - 2B = 0 \quad \boxed{B = 1}$

$\boxed{C = 0} \to \varphi_1(\Omega_3) = 1 + x$

(*) $\varphi_1(\Omega_4)$ $\quad \varphi_1 \begin{cases} 1 & (0,0) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \rightarrow Ax+By+C_4 \begin{cases} A=1 \\ A-B-C=0 \\ \underline{A+B-C=0} \\ 2A-2C=0 \quad C=1 \quad B=0 \end{cases} \longrightarrow \varphi_1(\Omega_4) = 1+y$

$$\varphi_1 = \begin{cases} 1-x & \text{en } \Omega_1 \\ 1-y & \text{en } \Omega_2 \\ 1+x & \text{en } \Omega_3 \\ 1+y & \text{en } \Omega_4 \end{cases}$$

$$\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[(1+x)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+(1+y)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\right]u_1=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+x^2+y^2)\,\varphi_1\,dx\,dy$$

$$\int_{\Omega_1}+\int_{\Omega_2}+\int_{\Omega_3}+\int_{\Omega_4}$$

$$\int_{\Omega_1}(\boxed{(1+x)}\cdot 1\,dx\,dy)+\int_{\Omega_2}((1+y)\cdot 1\,dx\,dy)+\int_{\Omega_3}(1+x)\,dx\,dy+\int_{\Omega_4}(1+y)\,dx\,dy = \ldots u_1 =$$

$\underbrace{\dfrac{\text{polinomio evaluado en los 3 vértices}}{3 \text{ (media)}}}\times \text{Área}$

$$=\frac{1+2+2}{3}\cdot \underset{\text{Área}}{1}+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=4$$

Segundo miembro:

$$\int_{\Omega_1}(1+x^2+y^2)(1+y)\,dx\,dy=\int_{\Omega_1}(1+x^2+y^2+y+x^2y+y^3)\,dx\,dy=\frac{1}{3}$$

$$\int_{\Omega_2}=\frac{1}{3}\qquad \int_{\Omega_3}=\frac{1}{3}\qquad \int_{\Omega_4}=\frac{1}{3}\longrightarrow \frac{4}{3}$$

$$\cancel{\frac{12}{3}}u_1=\cancel{\frac{4}{3}}\qquad \boxed{u_1=\frac{1}{3}}$$

$$u_h\begin{cases}\dfrac{1-x}{3} & \text{en } \Omega_1\\[4pt] \dfrac{1-y}{3} & \text{en } \Omega_2\\[4pt] \dfrac{1+x}{3} & \text{en } \Omega_3\\[4pt] \dfrac{1+y}{3} & \text{en } \Omega_4\end{cases}$$

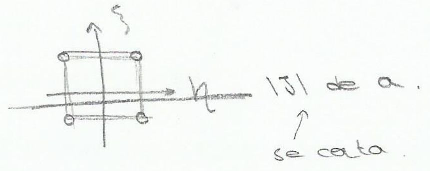
8/5/2015

Modelización y Análisis Numérico

Taller 5

Días 21 y 22 de Abril de 2015

1. Siendo $\hat{\Omega}$ el elemento estándar, cuadrilateral de cuatro nodos, situados en los puntos $(-1,-1), (1,-1), (1,1)\ y\ (-1,1)$, calcular las transformaciones de coordenadas, el jacobiano correspondiente y concluir sobre la invertibilidad, para los casos de Ω_e siguientes:



$|J|$ de a.

se calcula

a) $(0,-1), (0,-2), (1,2)\ y\ (1,-1)$
b) $(0,0), (1,-1), (1,1)\ y\ (0,-3)$
c) $(0,0), (1,0), (2,0)\ y\ (2,1)$

1.1 ¿Cuáles de ellas son admisibles? → el Jacobiano se va al denominador → $|J| \neq 0$

1.2 ¿En qué casos, permutando el orden de los nodos, las transformaciones serían admisibles? Indicar el orden adecuado.

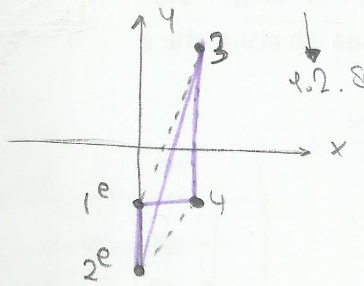
a)

1.1 No es admisible

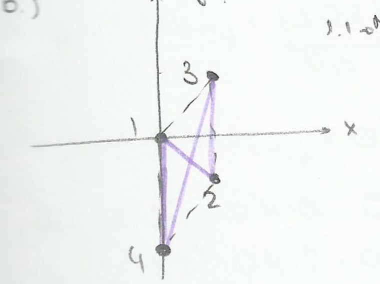
1.2. Sería admisible si cambiamos 3 y 4

$|J| = \frac{1}{4}\left[(1+3\eta)\right] = 0$

$1+3\eta = 0 \quad \eta = -\frac{1}{3}$



b.)



1.1 No admisible (Igual que el anterior)

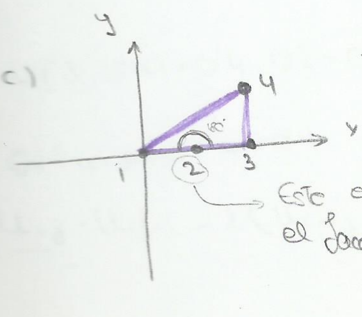
1.2 → se cambian 2 y 3.

$|J| = 1 - \frac{\xi}{2} + \frac{\eta}{2}$

$\eta = 2\left(\frac{\xi}{2} - 1\right)$

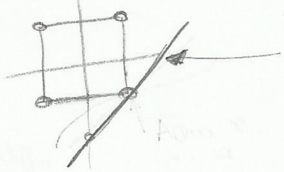
$\boxed{\eta = \xi - 2}$

c)



1.1 - No es admisible (sí lo es, pero no debemos usarlo)

Esto es el punto original donde el Jacobiano se anulará



19/5/2015

Modelización y Análisis Numérico

Taller 6

Mayo 2015

Sea el problema del calor, representado por la ecuación en derivadas parciales parabólicas en 1 dimensión, siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \underset{\gamma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -3u \qquad x \in (0,4), t>0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = t+1 \\ u(4,t) = 17(t+1) \end{array}\right| \quad \text{condiciones de contorno}$$

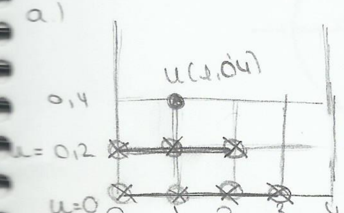
$$u(x,0) = 1+x^2 \quad \text{condición inicial}$$

a) Resolverlo mediante un esquema en diferencias finitas de tipo explícito (para el tiempo un esquema Euler progresivo).

Tomando $h=1$ y $k=0,2$ en la discretización calcular el valor aproximado mediante el esquema anterior de $u=(1,0.4)$.

b) Resolverlo mediante un esquema de diferencias finitas de tipo implícito (para el tiempo un esquema Euler regresivo). Aplicarlo al cálculo aproximado de $u=(1,0.4)$. ¿Se puede hacer aquí en un solo paso, a diferencia del apartado anterior? Plantear el sistema que se obtiene debido a su carácter implícito.

a)



$$\lambda = \frac{k\gamma}{h^2} = \frac{0'2\cdot 2}{1} = 0'4$$

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{k} - \frac{\gamma}{h^2}\left(u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}\right) = -3u_{ij}$$

$$u_{ij+1} - \lambda u_{i-1,j} - (1-2\lambda)u_{ij} - \lambda u_{i+1,j} = -3k u_{ij}$$

$$u_{i,j+1} = \underbrace{\lambda}_{0,4} u_{i-1,j} + \underbrace{(1-2\lambda)}_{0'2} u_{ij} + \underbrace{\lambda}_{0,4} u_{i+1,j} - \underbrace{3k}_{0'6} u_{ij}$$ (Euler progresivo)

$$u_{i,j+1} = 0'4\, u_{i-1,j} - 0'4\, u_{ij} + 0'4\, u_{i+1,j}$$

Hay que comprobar que las condiciones de contorno son compatibles

$$u(1,0'2) = 0'4\cdot 0 - 0'4\cdot 2 + 0'4\cdot 5 = 1'6$$

$$u(2,0'2) = 0'4\cdot 2 - 0'4\cdot 5 + 0'4\cdot 10 = 2'8$$

$$u(1,0'4) = 0'4\cdot 0'2 - 0'4\cdot 1'6 + 0'4\cdot 2'8 = \underline{0'88}$$

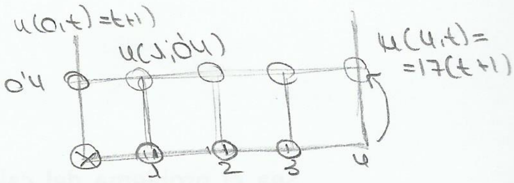
En un paso $k=0'4 \rightarrow \lambda = \frac{\gamma k}{h^2} = 0'8$. No estable

$$\underline{u_{ij} - u_{ij-1}} - \lambda\left(u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}\right) + 3k\, u_{ij} = u_{ij-1}$$

Como la λ de verdad ($0'8$) no es estable $\rightarrow$ usas la anterior porque te apetece

$$\lambda U_{i-1j} + (1-2\lambda)U_{ij} + \lambda U_{i+1j} + 0'6\, U_{ij} = U_{ij-1}$$

$$0'4\, U_{i-1j} + 0'8\, U_{ij} + 0'4\, U_{i+1j} = U_{ij-1}$$



$$0'4 \cdot 1'4 + 0'8\, U(1,0'4) + 0'4\, U(2,0'4) = 2$$

$$0'4\, U(1,0'4) + 0'8\, U(2,0'4) + 0'4\, U(3,0'4) = 5$$

$$0'4\, U(2,0'4) + 0'8\, U(3,0'4) + 0'4(17 \cdot 1'4) = 10$$

Modelización y Análisis Numérico

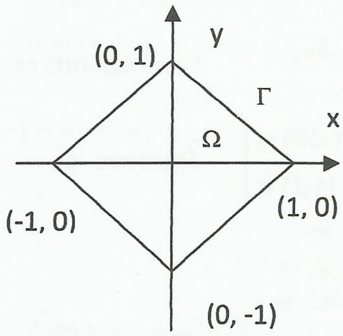
Taller 7

Mayo de 2015

En el cuadrado Ω de la figura, de frontera Γ, se plantea el problema de contorno siguiente:

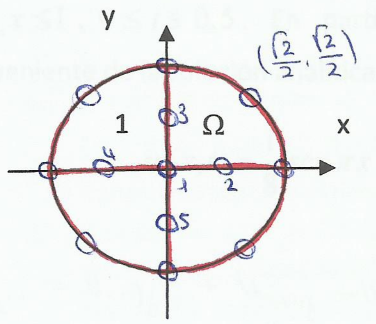
"Hallar $u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ tal que:

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1+x+y \quad \text{en } \Omega \\ \qquad\qquad u=0 \quad \text{en } \Gamma \quad "\end{array}\right.$$



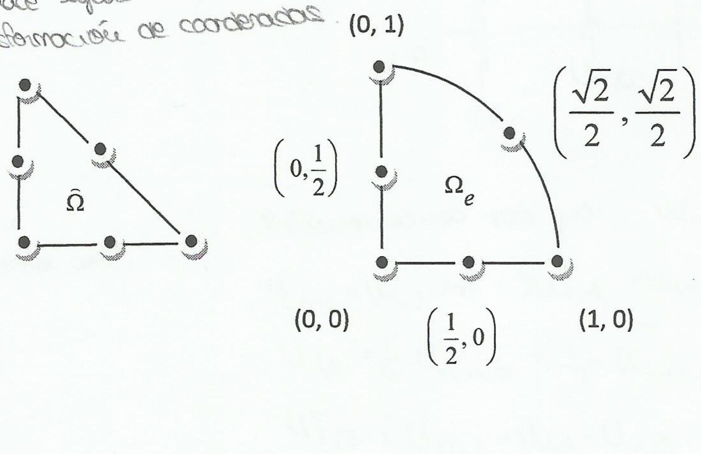
1. Establecer su formulación débil.
2. Se subdivide Ω en 4 elementos triangulares de igual tamaño (cada uno de ellos con 2 vértices en el contorno y el tercero en el origen de coordenadas)

Plantear el sistema algebraico que se obtiene por el método de elementos finitos para el cálculo de la solución aproximada, utilizando como elementos 4 triángulos de 6 nodos (vértices y mitad de los lados), con polinomios aproximadores a trozos de grado 2 en cada elemento. Se llega a un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas.



3. ¿Si Ω es el círculo de radio 1 y centro en el origen de coordenadas, cómo podría plantearse la solución mediante elementos finitos triangulares con un lado curvo? ¿Qué expresión tendrían aquí las transformaciones de coordenadas para pasar de elemento estándar $\hat{\Omega}$ de 6 nodos y tres lados rectos a cada uno de los 4 elementos triangulares de 6 nodos y dos lados rectos y uno curvo?

Se hace igual salvo por la transformación de coordenadas



22/5/2015

1.)

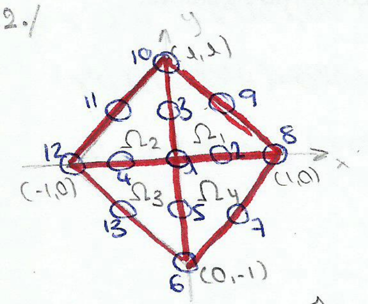
$v(x,y)=0$ en Γ

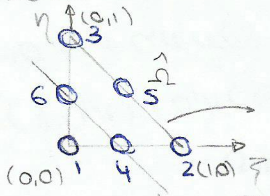
(1) "Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$
$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_\Omega (1+x+y)\, v\, dx\,dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)"$$

$\hookrightarrow$ formulación débil.

2./

(*) 13 ec pero 8 son c. contorno Dirichlet homogéneas





$\xi+\eta-1=0$

$\xi+\eta-\frac{1}{2}=0$

$\hat{\varphi}_1 = 2(\xi+\eta-1)(\xi+\eta-\frac{1}{2})$

$\hat{\varphi}_2 = 2\cdot\xi(\xi-\frac{1}{2})$

$\hat{\varphi}_4 = -4\xi(\xi+\eta-1) = 1$ con $(\frac{1}{2},0)$

$\hookrightarrow \xi=0 \to \eta$

$\hat{\Omega} \to \Omega_1$
$$\begin{cases} x=\xi \\ y=\eta \end{cases}$$

$\hat{\Omega} \to \Omega_3$
$$\begin{cases} x=-\xi \\ y=-\eta \end{cases}$$

(*) En el nodo 2:
$$\begin{cases} \text{en } \Omega_1 & \varphi_2 = 4x(x+y-1) \\ \text{en } \Omega_4 & \varphi_2 = 4x(x-y-1) \end{cases}$$

$\hat{\Omega} \to \Omega_2$
$$\begin{cases} x=-\xi \\ y=\eta \end{cases}$$

$\hat{\Omega} \to \Omega_4$
$$\begin{cases} x=\xi \\ y=-\eta \end{cases}$$

el nodo 3 $\to$ imagen del 6

el nodo 4 $\to$ imagen del 4 $\ominus$

el nodo 5 $\to$ imagen del 6 $\ominus$

La frontera todo 0 (como si no estuviera)

Modelización y Análisis Numérico

Taller 8

26 - 27 de Mayo de 2015

Dada la ecuación en derivadas parciales hiperbólicas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in (0,1)\,,\, t > 0$$

con las condiciones :

$$\text{de contorno} \quad \left| \begin{array}{l} u\,(0,t) = 0 \\ u\,(1,t) = 0 \end{array} \right.$$

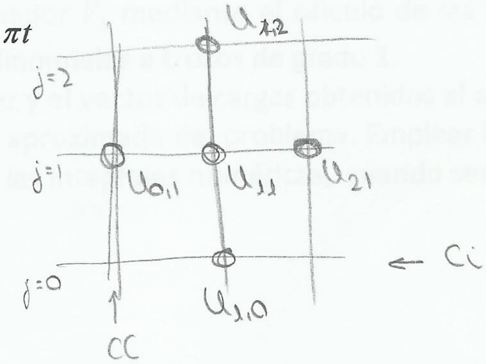
Error $\rightarrow$ 0'001 $\rightarrow$ comprobar si el resultado que se obtiene $\boxed{u_{23} = 0'0438}$

¿se diferencia mucho?

$$\text{iniciales} \quad \left| \begin{array}{l} u\,(x,0) = \dfrac{1}{8}\, sen\, \pi x \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0 \end{array} \right.$$

usando el esquema explícito, calcular u_{ij}, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}1$ para $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 0{,}5$. En particular, hallar u_{12} y compararlo con el valor exacto, proveniente de la solución analítica:

$$u\,(x,t) = \frac{1}{8}\, sen\, \pi x \,\cos \pi t$$



$\lambda = \frac{k}{h} = 1$

$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$

$u_{0,j} = 0$

$u_{n,j} = 0$

$u_{i,0} = \frac{1}{8} \text{sen}\pi x$ ~~cost~~

Particularizando para $j=0$: $u_{i,1} = u_{i-1,0} + u_{i+1,0} - u_{i,-1}$

$u_{i,-1} = u_{i,1} \Rightarrow 2u_{i,1} = u_{i-1,0} + u_{i+1,0}$

$u_{i,1} = \frac{1}{2} u_{i-1,0} + \frac{1}{2} u_{i+1,0} = \frac{1}{2} f((i-1)h) + \frac{1}{2} f((i+1)h)$

$u_{1,2} = u_{0,1} + u_{2,1} - u_{1,0}$

$u_{1,2} = 0 + u_{2,1} - \frac{1}{8} \text{sen}(\pi \cdot 0'1) = u_{2,1} - 0'038$